



TESIS - SM 142501

**KARAKTERISASI MAGNETOHIDRODINAMIK
FLUIDA MIKROKUTUB TAK TUNAK YANG
MELEWATI BOLA DIPENGARUHI KONVEKSI
CAMPURAN MENGGUNAKAN SKEMA
IMPLISIT EULER**

MUFATIN FAUZIYAH
NRP 0611 1650 012 010

DOSEN PEMBIMBING:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SM 142501

**THE CHARACTERIZATION OF UNSTEADY
MAGNETOHYDRODINAMIC MICROPOLAR
FLUID THROUGH A SPHERE AFFECTED BY
MIXED CONVECTION USING EULER
IMPLICIT SCHEME**

MUFATIN FAUZIYAH
NRP 0611 1650 012 010

SUPERVISOR:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATING, AND DATA SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Mufatin Fauziyah

NRP. 0611 1650 012 010

Tanggal Ujian
Periode Wisuda

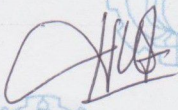
: 26 Juli 2018

: September 2018


Disetujui oleh:


Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
NIP 19650605 198903 1 002


(Pembimbing I)


Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M. Si.
NIP. 19830517 200812 1 003


(Pembimbing II)


Dr. Hariyanto, M. Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)



Dr. Chairul Imron, M. I. Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

(Penguji)


Dr. Dra. Mardijah, M. T.
NIP. 19670114 199102 2 001

(Penguji)


Dekan FMKSD,


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

KARAKTERISASI MAGNETOHIDRODINAMIK FLUIDA MIKROKUTUB TAK TUNAK YANG MELEWATI BOLA DIPENGARUHI KONVEKSI CAMPURAN MENGGUNAKAN SKEMA IMPLISIT EULER

Nama Mahasiswa : Mufatin Fauziyah
NRP : 0611 1650 012 010
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Pada penelitian ini dibahas mengenai karakterisasi pada magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola dipengaruhi oleh konveksi campuran. Karakterisasi aliran fluida mikrokutub yang dibahas meliputi kecepatan, temperatur, dan kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub dilihat dari variasi parameter magnetik, konveksi campuran, bahan mikrokutub, dan bilangan Prandtl. Untuk membahas permasalahan tersebut, dibuat model matematika yang dibangun dari persamaan kontinuitas, momentum, momentum angular, dan energi. Persamaan dimensional yang terbentuk kemudian diubah menjadi persamaan non dimensional. Selanjutnya persamaan non dimensional diubah menjadi persamaan silmilaritas dan diselesaikan secara numerik menggunakan skema implisit Euler. Hasil menunjukkan bahwa kecepatan semakin besar seiring dengan meningkatnya nilai parameter konveksi campuran (α). Kecepatan semakin kecil dengan bertambahnya bilangan Prandtl (Pr), parameter bahan mikrokutub, dan parameter magnetik (M). Temperatur fluida semakin tinggi saat parameter konveksi campuran dan bahan mikrokutub semakin besar. Sebaliknya, temperatur semakin rendah dengan bertambahnya parameter magnetik dan bilangan Prandtl. Meningkatnya profil mikrorotasi seiring dengan meningkatnya bilangan Prandtl dan pameter magnetik. Profil mikrorotasi semakin menurun dengan meningkatnya parameter konveksi campuran. Semakin besar parameter bahan mikrokutub maka profil mikrorotasi semakin rendah sampai titik tertentu kemudian berbalik menjadi semakin tinggi.

Kata-kunci: Fluida mikrokutub, magnetohidrodinamik, konveksi campuran, skema implisit Euler

**THE CHARACTERIZATION OF UNSTEADY
MAGNETOHYDRODINAMIC MICROPOLAR FLUID
THROUGH A SPHERE AFFECTED BY MIXED CONVECTION
USING EULER IMPLICIT SCHEME**

Name : Mufatin Fauziyah
NRP : 0611 1650 012 010
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

This research examines the characterization unsteady magnetohydrodynamic micropolar fluid pass a sphere affected by mixed convection. the characterization consists of velocity, temperature, and microrotation profile of fluid particle based on variation of magnetic parameter, mixed convection parameter, Prandtl number, and micropolar parameter. For solving this problem, we develop mathematic model that construct from continuity equation, momentum equation, angular equation, and energy equation. The dimensional equations that have been obtained is converted to non dimensional equations. These equations are further converted into similarity equations and solved numerically by using Euler implicit scheme. The result shows that the velocity become greater with the increasingly mixed convection parameter (α). The velocity decreases when magnetic parameter(M), micropolar parameter(K), and Prandtl number(Pr) increase. The increasingly mixed convection and micropolar parameter lead to the increasingly temperature. Moreover, temperature will decreases when magnetic parameter (M) and Prandtl number (Pr) increase. When microrotation profile increases, magnetic parameter and Prandtl number increase. Whereas microrotation profile decreases with increasing mixed convection parameter. Microrotation profile increases when micropolar parameter decreases on a point, then microrotation profile will decreases with increasing micropolar parameter.

Key-words: Euler implicit scheme, magnetohydrodynamic, micropolar fluid, mixed convection

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis diberikan suatu kesempatan untuk menyelesaikan tesis yang berjudul

”Karakterisasi Magnetohidrodinamik Fluida Mikroktub Tak Tunak Yang Melewati Bola Dipengaruhi Konveksi Campuran Menggunakan Skema Implisit Euler”.

Tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Kepala Program Studi Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc. dan Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
6. Dr. Hariyanto M.Si., Dr. Chairul Imron, M. I. Komp., dan Dr. Dra. Mardijah, M. T. selaku dosen penguji atas kritik dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki tesis ini.
7. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran selama menempuh program studi Strata-2.
8. Suami, Hendra Utama serta putra-putri, Adara Utama dan Zefiro Utama atas segala dukungan, motivasi, dan do'a selama penulis menempuh program studi strata-2.

9. Kedua orang tua, Bapak Markasim dan Ibu Marti'ah serta kakak Ahmad Nuri dan Samsul Anam yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Strata-2.
10. Teman-teman tim penelitian magnetohidrodinamik, Lutfi Mardianto, S.Pd, Yolanda Norasia, S.Si., Charisma Juni K., S.Si., Maulidyani Abu, S.Si., dan Rahayu Oktavia atas segala dukungan, kerjasama, dan motivasi dalam hal diskusi materi terkait penelitian hingga terselesaikannya tesis ini.
11. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika angkatan 2016 genap. Terimakasih banyak atas segala sesuatunya yang telah diberikan selama menjalani perkuliahan Strata-2
12. Staff Pasca Sarjana Matematika, Mbak Resty dan Mas Afif. Terimakasih banyak atas bantuan dalam menginformasikan keperluan administrasi dan bersedia menampung keluh kesah penulis selama proses penyelesaian tesis hingga kelulusan.
13. Kakak dan Adik angkatan di Program Studi Magister Matematika, serta semua pihak yang telah memberikan do'a dan dukungannya kepada penulis, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT. Penulis menyadari bahwa dalam tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PERSETUJUAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR NOTASI	xix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	5
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	7
2.1 Penelitian-Penelitian Terkait	7
2.2 Fluida	8
2.3 Fluida Mikrokutub	9
2.4 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu	9
2.5 Bilangan Non-Dimensional	10
2.5.1 Bilangan Non-Dimensi Reynolds (Re)	10
2.5.2 Bilangan Non-Dimensi Grashof (Gr)	11
2.5.3 Bilangan Non-Dimensi Prandtl (Pr)	11
2.6 Aliran Lapisan Batas	12
2.7 Magnetohidrodinamik	12
2.8 Konveksi Campuran	14
2.9 Skema Implisit Euler	15
BAB 3 METODE PENELITIAN	19
3.1 Tempat Penelitian	19
3.2 Tahapan Penelitian	19

BAB 4	MODEL MATEMATIKA	21
4.1	Persamaan Pembangun	22
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	22
4.1.2	Persamaan momentum	24
4.1.3	Persamaan Momentum Angular	33
4.1.4	Persamaan Energi	36
4.2	Persamaan Pembangun Dimensional	41
4.3	Transformasi Variabel Tak Berdimensi	41
4.4	Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas	43
4.5	Fungsi Alir	45
4.6	Persamaan Similaritas	46
BAB 5	Penyelesaian Model Matematika	53
5.1	Diskritisasi Model	53
5.1.1	Diskritisasi Model Persamaan Momentum Untuk <i>small time</i>	54
5.1.2	Diskritisasi Model Persamaan Momentum Angular untuk <i>small time</i>	56
5.1.3	Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk <i>small time</i>	57
5.1.4	Diskritisasi Model Persamaan Momentum Untuk <i>Large Time</i>	58
5.1.5	Diskritisasi Model Persamaan Momentum Angular Untuk <i>Large Time</i>	60
5.1.6	Diskritisasi Model Persamaan Energi Untuk <i>Large Time</i>	61
5.2	Algoritma Thomas	62
5.3	Validasi Model	63
5.4	Simulasi dan Analisis Hasil	65
5.4.1	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M)	65
5.4.2	Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran	68
5.4.3	Pengaruh Variasi Parameter Bahan Mikroktub	71
5.4.4	Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl	73
BAB 6	KESIMPULAN DAN SARAN	77
6.1	Kesimpulan	77
6.2	Saran	79
DAFTAR PUSTAKA		83
LAMPIRAN		85
BIOGRAFI PENULIS		104

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Roadmap Penelitian	8
Gambar 2.2	Skema Implisit Euler	16
Gambar 4.1	Koordinat Bola	21
Gambar 4.2	Sistem Fisis Fluida yang Melewati Bola Pejal	22
Gambar 4.3	Komponen Tegangan pada Permukaan Elemen Fluida ..	27
Gambar 4.4	Komponen <i>heat flux</i> pada volume kontrol (Versteeg, 2007)	38
Gambar 5.1	Profil Kecepatan Pada Validasi	64
Gambar 5.2	Profil Mikrorotasi Pada Validasi	65
Gambar 5.3	Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan	66
Gambar 5.4	Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Temperatur	67
Gambar 5.5	Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Mikrorotasi	68
Gambar 5.6	Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Kecepatan	69
Gambar 5.7	Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Temperatur	70
Gambar 5.8	Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Profil Mikrorotasi	70
Gambar 5.9	Variasi Parameter Bahan Mikrokutub Terhadap Kecepatan	72
Gambar 5.10	Variasi Parameter Bahan Mikrokutub Terhadap Temperatur	72
Gambar 5.11	Variasi Parameter Bahan Mikrokutub Terhadap Profil Mikrorotasi	73
Gambar 5.12	Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Kecepatan	74
Gambar 5.13	Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Temperatur	74
Gambar 5.14	Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Profil Mikrorotasi ..	75

DAFTAR TABEL

Tabel 5.1	Validasi Hasil Simulasi	64
Tabel 5.2	Nilai Parameter Magnetik	66

DAFTAR NOTASI

R_e	: bilangan non-dimensi Reynold
Gr	: bilangan non-dimensi Grashof
Pr	: bilangan non-dimensi Prandtl
ρ	: kerapatan fluida
μ	: viskositas dinamik fluida
ν	: viskositas kinematik fluida
u	: kecepatan arah- x
v	: kecepatan arah- y
\mathbf{P}	: tekanan
\mathbf{B}	: medan magnet
\mathbf{E}	: medan listrik
\mathbf{J}	: kerapatan arus
μ_0	: permeabilitas ruang hampa
ε_0	: permivitas ruang hampa
σ	: konduktivitas listrik
g	: gaya gravitasi
J	: densitas mikroinersia
γ	: gradien viskositas
k	: viskositas rotasi
β	: koefisien muai panas
e	: energi spesifik
h	: entalpi
E	: energi
W	: usaha
Q	: kalor
m	: massa
H	: reaksi panas
C_p	: kalor jenis
T	: suhu
c	: konduktivitas panas fluida
λ	: difusifitas termal
K	: parameter bahan mikrokutub
M	: parameter magnetik
α	: parameter konveksi campuran

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fluida merupakan zat yang apabila diberikan tegangan geser akan berubah bentuk secara kontinu meskipun tegangan geser tersebut sangat kecil. Zat yang tergolong dalam fluida adalah zat cair dan gas (dalam keadaan suhu yang sangat tinggi disebut plasma). Ditinjau dari kemampatannya, fluida dibagi menjadi dua, yaitu fluida tak mampu mampat (*incompressible*) dan fluida yang mampu mampat (*compressible*). Zat cair termasuk dalam fluida *incompressible* dan zat gas termasuk dalam kategori fluida *compressible* (Widodo, 2012). Sedangkan fluida fase cair dibagi menjadi dua, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Pada fluida Newtonian terdapat hubungan yang linier antara besarnya tegangan geser yang diberikan dengan deformasi fluida. Sedangkan fluida non-Newtonian tidak memiliki karakteristik tersebut (Streeter, 1987). Contoh dari fluida non-Newtonian adalah cat, minyak pelumas, lumpur, dan darah.

Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida mikrokutub. Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro, yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Contoh dari fluida mikrokutub adalah darah hewan, *liquid crystal*, dan cairan polimer (polimer adisi) (Eringen, 1965). Suatu benda yang dilalui fluida, akan terbentuk lapisan batas di sekitar penampang benda akibat adanya faktor gesekan dan viskositas fluida. Kecepatan, temperatur, gaya gesek, dan gerakan mikrorotasi partikel fluida dapat dipengaruhi oleh perpindahan panas yang terjadi di sekitar fluida yang melalui benda tersebut. Perpindahan panas dari suatu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida disebut konveksi. Konveksi secara umum dibagi menjadi tiga, yaitu konveksi bebas, konveksi paksa, dan konveksi campuran. Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung karena perbedaan temperatur fluida. Konveksi paksa terjadi ketika fluida mengalir karena adanya kekuatan dari luar, sedangkan konveksi campuran terjadi karena adanya gaya apung dan kekuatan dari luar.

Dalam penelitian sebelumnya telah banyak dilakukan penelitian tentang

permasalahan konveksi campuran atas sebuah bola karena penerapannya yang luas dalam bidang teknik seperti mengurangi hambatan benda dan menghasilkan daya angkat yang cukup untuk menumpu benda pada kondisi tertentu (Ghani, 2015). Pada penelitian ini akan dikaji tentang pengaruh konveksi campuran dan medan magnet terhadap parameter kecepatan, temperatur, dan mikrorotasi pada magnetohidrodinamik fluida mikrokutub yang mengalir melewati bola. Salah satu penelitian yang berkaitan dengan konveksi campuran pada fluida yang melewati permukaan bola diantaranya pada penelitian yang dilakukan oleh (Ghani, 2015). Penelitian tersebut mengkaji aliran konveksi campuran fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola. Dari penelitian tersebut, diperoleh model aliran konveksi campuran yang melewati permukaan sebuah bola dan kesimpulan bahwa semakin besar bilangan Prandtl maka menyebabkan profil temperatur semakin kecil karena difusivitas termal yang semakin menurun.

Penelitian lain yang berkaitan adalah penelitian yang dilakukan oleh (Mohammad, 2012). Pada penelitian tersebut dikaji pengaruh parameter konveksi campuran, mikrorotasi, dan material dari fluida mikrokutub terhadap separasi aliran pada lapisan batas fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola. Dari penelitian tersebut diperoleh bahwa parameter konveksi campuran, mikrorotasi, dan konsentrasi fluida sangat berpengaruh terhadap aliran separasi aliran fluida, baik aliran separasi dengan arah yang sama maupun pada arah yang berlawanan.

Magnetohidrodinamik (MHD) mempelajari tentang konduksi fluida elektrik yang dipengaruhi oleh medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah air garam, plasma, dan logam cair. Penelitian aliran magnetohidrodinamik penting kaitannya dalam bidang teknik dan industri material maju, contohnya adalah proses pendinginan reaktor nuklir, pasokan gas alam, pertumbuhan kristal, pembangkit listrik, dan akselerator magnetohidrodinamik.

Beberapa penelitian sebelumnya tentang magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub, diantaranya (Narayana, 2013) yang melakukan penelitian magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub di bawah pengaruh konveksi bebas. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh medan magnet terhadap kecepatan mikrorotasi. Penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa nilai parameter magnetik yang juga dipengaruhi oleh *Schmidt number*, *Grashof number* dan parameter rotasi dapat menyebabkan prol mikro rotasi yang dihasilkan semakin menurun. Penelitian lainnya dari (Widodo, 2016) tentang

karakteristik lapisan batas magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub yang melalui bola. Penelitian ini mengkaji pengaruh medan magnet terhadap distribusi kecepatan, mikrorotasi dan koefisien gesekan pada aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik secara numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box. Hasil penelitian menunjukkan bahwa distribusi kecepatan naik dan mikrorotasi menurun jika variabel magnetik dan parameter mikrokutub bertambah.

Penelitian lain yang berkaitan dengan magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub dilakukan oleh (Pratomo, 2017) tentang magnetohidrodinamik tak tunak pada fluida mikrokutub pada lapisan batas yang dipengaruhi medan magnet. Dari penelitian tersebut diperoleh bahwa semakin besar parameter magnetik maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida mikrokutub, semakin besar parameter bahan maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida mikrokutub, semakin besar parameter magnetik maka profil mikrorotasi akan untuk $n=0$ dan semakin besar untuk $n = 0,5$ dan $n = 1$.

Pada penelitian ini dibahas mengenai karakterisasi pada magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola dipengaruhi oleh konveksi campuran. Karakterisasi aliran fluida mikrokutub yang dibahas meliputi kecepatan, temperatur, dan kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub dilihat dari variasi parameter magnetik, konveksi campuran, bahan mikrokutub, dan bilangan Prandtl. Untuk membahas permasalahan tersebut, akan dibuat model matematika yang dibangun dari persamaan kontinuitas, momentum, momentum angular, dan energi. Selanjutnya model matematika yang telah diperoleh akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema implisit Euler dan disimulasikan menggunakan software MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana membangun model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet?
2. Bagaimana pengaruh parameter konveksi campuran, mikrokutub, magnetik terhadap kecepatan, temperatur, dan kecepatan mikrorotasi

partikel fluida pada model matematika magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak melewati bola yang diselesaikan secara numerik menggunakan skema implisit Euler?

1.3 Batasan Masalah

Dalam rencana penelitian tesis ini diberikan beberapa batasan masalah dengan rincian sebagai berikut.

1. Aliran fluida mengalir dari bawah ke atas.
2. Geometri benda yang diamati pada penelitian ini adalah bola pejal bermuatan magnet.
3. Penelitian difokuskan pada lapisan batas yang terletak pada titik stagnasi bawah yaitu $x = 0$.
4. Fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub.
5. Aliran fluida yang digunakan adalah tak tunak dan *incompressible*.
6. Pengaruh konveksi campuran dilihat dari variasi parameter konveksi campuran.
7. Untuk mendapatkan penyelesaian numerik dari persamaan pembangun digunakan skema implisit Euler.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Membangun model matematika dari aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola dibawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.
2. Merancang solusi numerik model matematika dari aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik tak tunak yang melalui bola di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.
3. Menganalisis pengaruh parameter konveksi, mikrokutub, bilangan Prandtl, dan magnetik terhadap kecepatan, temperatur, dan kecepatan mikrorotasi partikel fluida.

1.5 Manfaat Penelitian

Dengan dilakukannya penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Sebagai bentuk pengembangan ilmu matematika terapan di bidang teknologi dan industri misalnya pada pengeboran minyak, proses pendinginan reaktor nuklir, dan pembangkit listrik.
2. Sebagai bentuk kontribusi mengenai penerapan skema implisit Euler pada magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola yang dipengaruhi konveksi campuran dan medan magnet.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bab ini dibahas mengenai kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis.

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut.

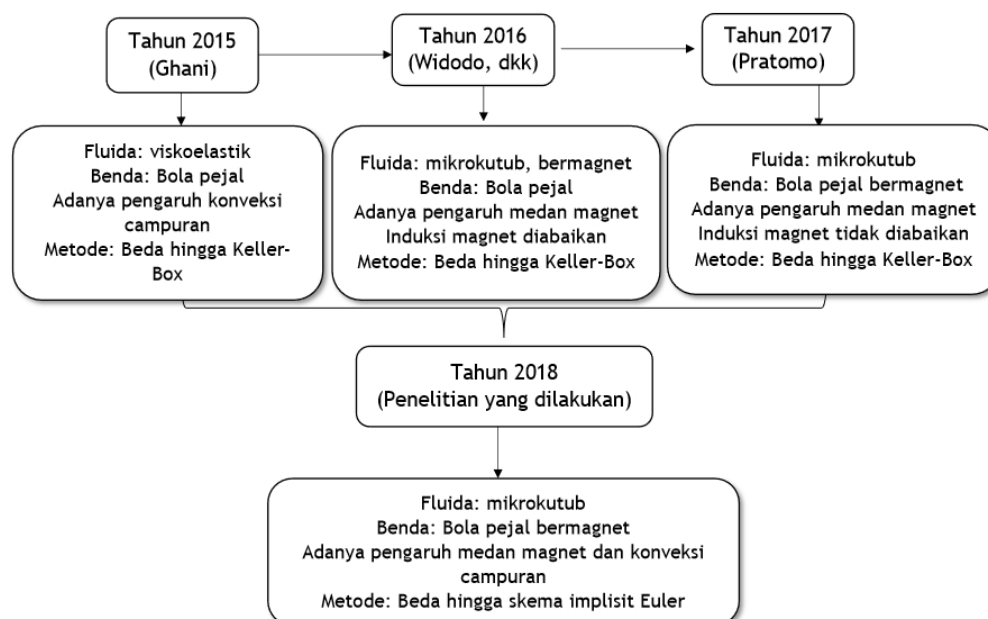
1. *Incompressible And Steady Mixed Convection Flow Past Over A Sphere* (Ghani, 2015) Dalam penelitian ini dibahas mengenai aliran tunak pada fluida visko-elastis yang mengalir melalui bola. Penelitian ini membahas pengaruh bilangan Prandtl dan parameter visko-elastis pada kecepatan dan temperatur aliran fluida dengan adanya konveksi campuran secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box. Hasil penelitian menunjukkan bertambahnya bilangan Prandtl menyebabkan semakin turunnya jecepatan dan temperatur fluida. Bertambahnya parameter visko-elastis seiring dengan bertambahnya temperatur dan berkurangnya kecepatan fluida.

2. *The Characterization of Boundary Layer Flow In The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past A Solid Sphere* (Widodo,*dkk*, 2016a)

Pada tahun 2016, Widodo, *dkk* telah melakukan penelitian mengenai karakteristik aliran lapisan batas pada fluida mikrokutub magnetohidrodinamik yang melewati bola pejal. Penelitian ini mengkaji pengaruh medan magnet terhadap distribusi kecepatan, mikrorotasi dan koefisien gesekan pada aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik secara numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box. Diasumsikan tidak ada induksi medan magnet pada aliran fluida. Hasil penelitian menunjukkan bahwa distribusi kecepatan naik dan mikrorotasi menurun jika variabel magnetik dan parameter mikrokutub bertambah.

3. Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokutub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet (Pratomo, 2017)

Pada tahun 2017, Pratomo mengkaji mengenai magnetohidrodinamik tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub yang dipengaruhi medan magnet. Penelitian ini membahas pengaruh parameter magnetik dan parameter bahan (*micropolar*) terhadap kecepatan aliran fluida dan kecepatan mikrorotasi secara numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box. Induksi magnet pada penelitian ini tidak diabaikan dan bola yang digunakan adalah bola pejal bermagnet. Hasil penelitian menunjukkan semakin besar parameter magnetik maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida mikrokutub, semakin besar parameter bahan maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida mikrokutub, semakin besar parameter magnetik maka profil mikrorotasi akan untuk $n=0$ dan semakin besar untuk $n = 0,5$ dan $n = 1$.



Gambar 2.1: Roadmap Penelitian

2.2 Fluida

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara terus menerus bila terkena tegangan geser, meskipun tegangan geser tersebut sangat kecil. Zat di

alam semesta yang termasuk fluida adalah zat cair dan gas (Widodo, 2012). Tegangan geser adalah tegangan yang bekerja sejajar atau menyinggung permukaan. Tegangan geser dapat diperoleh dengan membagi gaya geser terhadap luas.

$$\tau = \frac{F_s}{A}$$

dengan,

τ = tegangan geser ($\frac{N}{m^2}$)

F_s = gaya geser (N)

A = luas bidang geser (m^2)

Fluida fase cair dibagi menjadi dua, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Pada fluida Newtonian terdapat hubungan yang linier antara jumlah tegangan geser yang diberikan dengan deformasi fluida. Sedangkan fluida non-Newtonian tidak memiliki karakteristik tersebut (Streeter, 1987). Fluida mikrokutub termasuk dalam fluida non-Newtonian.

2.3 Fluida Mikrokutub

Fluida mikrokutub diperkenalkan oleh Eringen (1964). Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Partikel kaku yang terkandung di dalam elemen volume kecil yang dapat memutar pusat volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Narayana, 2013) (Widodo, *dkk*, 2016a). Fluida mikrokutub memberi reaksi pada gerakan mikrorotasi dan putaran inersia, sehingga mendukung *couple stress* dan mendistribusikan *body couple* (Eringen, 1965). Dalam kehidupan sehari-hari, fluida yang termasuk golongan mikrokutub adalah cairan koloid, suspensi polimer, dan darah.

Fluida mikrokutub memiliki mikrorotasi dan kecepatan yang lebih rendah dibandingkan dengan fluida Newtonian. Kecepatan aliran fluida dalam lapisan batas meningkat dibandingkan dengan jika tidak ada mikrorotasi pada lapisan batas (Abdel-Rahman, 2009).

2.4 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu : (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady State*) berarti kecepatan aliran fluida tidak

dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*) berarti kecepatan aliran fluida dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.5 Bilangan Non-Dimensional

Konveksi panas terjadi pada saat partikel-partikel fluida mengalami pergerakan akibat adanya perbedaan temperatur. Berdasarkan persamaan tersebut, pada konveksi panas terdapat beberapa bilangan non-dimensi yang terkait dengan kecepatan aliran, viskositas dan temperatur diberikan sebagai berikut.

2.5.1 Bilangan Non-Dimensi Reynolds (*Re*)

Bilangan non-dimensi Reynolds adalah suatu bilangan non-dimensi yang menganalisa gaya inersia fluida. Jenis aliran fluida dan gaya gesekan yang terjadi dengan permukaan fluida menentukan besarnya bilangan Reynold. Bilangan non-dimensi Reynolds adalah ukuran relatif jenis aliran fluida, seperti aliran laminar, aliran transisi, atau aliran turbulen didalam pipa, lapisan batas, atau disekitar benda yang terendam. Bilangan non-dimensi Reynolds dapat dituliskan sebagai berikut.

$$Re = \frac{GayaInersia}{GayaViskositas}$$

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$$

dengan:

U_{∞} : kecepatan pada aliran bebas (m/s)

ρ : densitas fluida

ν : viskositas kinematik fluida

2.5.2 Bilangan Non-Dimensi Grashof (Gr)

Bilangan non-dimensi Grashof adalah perbandingan gaya apung *buoyancy force* terhadap gaya viskos dalam aliran fluida. Bilangan non-dimensi Grashof dapat dituliskan sebagai berikut.

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2} \quad (2.6)$$

dengan:

g : gaya gravitasi

β : koefisien muai panas

a : panjang karakteristik suatu benda yang dilewati fluida

ν : viskositas kinematik

T_w : temperatur permukaan fluida

T_∞ : temperatur fluida

2.5.3 Bilangan Non-Dimensi Prandtl (Pr)

Bilangan Prandtl adalah perbandingan antara ketebalan lapis batas kecepatan dengan ketebalan lapis batas termal. Lapisan batas termal adalah daerah dimana terdapat perubahan suhu dalam aliran akibat proses pertukaran kalor antara fluida dan dinding. Bilangan Prandtl dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Pr = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}}$$

dengan:

ν : viskositas kinematik fluida

λ : difusivitas termal

μ : viskositas dinamik fluida

k : konduktivitas panas fluida

c_p : panas jenis pada tekanan konstan

Viskositas kinematika disebut sebagai difusivitas molekular momentum karena merupakan ukuran kecepatan perpindahan momentum antara molekul-molekul. Difusivitas termal fluida disebut juga sebagai difusivitas molekular panas karena berkaitan dengan ukuran perbandingan antara penerusan panas dan kapasitas penyimpanan energi molekul-molekul.

2.6 Aliran Lapisan Batas

Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk di sekitar penampang suatu benda yang dilalui fluida akibat faktor gesekan dan viskositas fluida. Teori lapisan batas dikemukakan oleh Ludwig Prandtl seorang ahli aerodinamika asal Jerman pada tahun 1904. Sebelumnya pada tahun 1755, seorang ahli hidrodinamika bernama Leonhard Euler mengemukakan aliran tanpa gesekan dan kemudian dinyatakan ke dalam persamaan Euler. Dengan banyaknya kontradiksi terhadap hasil eksperimennya, persamaan Euler dijelaskan dan dikaji lebih rinci untuk kondisi aliran bergesekan oleh Navier pada tahun 1827 dan oleh Stokes pada tahun 1845 yang sekarang dikenal dengan persamaan Navier-Stokes.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia beserta viskositasnya pada usulan penelitian ini adalah jenis aliran laminar. Aliran laminar adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak perlahan dengan kecepatan yang kecil dan atau fluida memiliki tingkat kekentalan yang besar.

2.7 Magnetohidrodinamik

Istilah *magnetohydrodynamic* terdiri dari kata *magneto* yang berarti medan magnetik, *hydro* yang berarti cairan/fluida, dan *dynamic* yang berarti pergerakan. Magnetohidrodinamik (MHD) adalah sebuah bidang yang mempelajari tentang pergerakan elektromagnet dan mekanika fluida untuk mendeskripsikan aliran konduksi fluida elektrik. (Batista, 2010). Fluida yang dimaksud dapat berupa plasma, logam cair, darah atau air garam. Dalam penelitian ini magnetohidrodinamik dapat diartikan sebagai dinamika atau pergolakan yang terjadi pada fluida yang bersifat konduktor yang dipengaruhi medan magnet.

Fluida yang memiliki karakteristik MHD memiliki kemampuan mengendalikan separasi aliran, memanipulasi aliran fluida dan mengoptimalkan perpindahan panas dari fluida konduktor viskos maupun mikrokutub.

Bentuk persamaan MHD yaitu persamaan-persamaan fluida yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah

persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal (Ningtyas, 2016):

1. Persamaan momentum

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

2. Persamaan konservasi massa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

\mathbf{B} = medan magnet $(0, 0, \mathbf{B})$

\mathbf{E} = medan listrik $(0, 0, \mathbf{E})$

\mathbf{V} = kecepatan massa plasma

\mathbf{J} = kerapatan arus

ρ = massa jenis

p = tekanan plasma

t = waktu

μ_0 = permeabilitas ruang hampa $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}$

Pada persamaan MHD di atas, persamaan maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}p$ tidak digunakan. Persamaan $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ hanya digunakan saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol. Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

2.8 Konveksi Campuran

Pada umumnya, terdapat tiga tipe dari perpindahan panas yaitu konduksi, konveksi dan radiasi. Jenis umum pada perpindahan panas yang biasanya terjadi diantara fluida adalah konveksi. Laju perpindahan panas konveksi dirumuskan melalui hukum pendinginan Newton yang dinyatakan dengan:

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_f)$$

atau

$$h = \frac{\Delta Q}{A \times \Delta T}$$

\dot{Q} = laju perpindahan panas konveksi (W)

h = koefisien konveksi $\frac{W}{m^2K}$

A = luas permukaan konveksi (m^2)

T_s = suhu permukaan sementara (K)

T_f = suhu fluida (K)

Koefisien konveksi merupakan parameter yang diperoleh berdasarkan experiment, nilainya bergantung kepada kepada semua variabel yang mempengaruhi proses konveksi seperti geometri permukaan, sifat aliran

fluida, properti fluida dan kecepatan fluida.

Konveksi secara umum dapat dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu konveksi bebas (alamiah), konveksi paksa dan konveksi campuran. Konveksi bebas adalah ketika aliran dipengaruhi oleh perbedaan temperatur atau bisa disebut efek gaya apung (Tafrikan, 2015). Konveksi bebas terjadi karena fluida bergerak secara alamiah dimana pergerakan fluida tersebut disebabkan oleh perbedaan masa jenis fluida akibat adanya variasi suhu pada fluida tersebut. Fluida yang suhunya tinggi menjadi lebih ringan dan mulai bergerak ke atas.

Sedangkan konveksi paksa menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang sangat dipengaruhi oleh kekuatan dari luar. Konveksi paksa terjadi karena bergeraknya fluida bukan karena faktor alamiah (Kasim, 2014). Fluida bergerak karena adanya alat yang menggerakkan fluida tersebut, misalnya kipas pompa, blower, dsb. Konveksi campuran adalah konveksi yang dipengaruhi oleh gaya apung dan kekuatan dari luar.

2.9 Skema Implisit Euler

Metode implisit euler menggunakan beda mundur dan beda tengah pada Deret Taylor dengan akurasi pada order pertama. Misalkan terdapat persamaan differensial berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

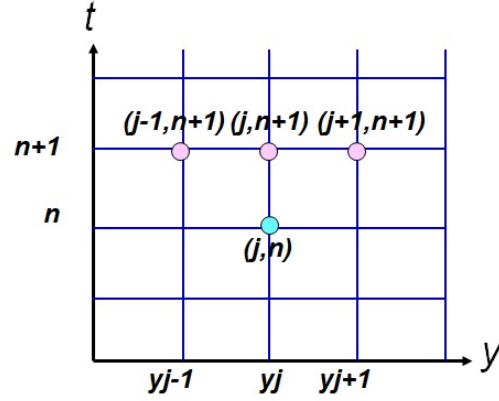
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right)_{j'}^{n'}$$

untuk $n' = n + 1$, Skema implisit euler adalah:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = v \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta^2 y}$$

dengan $\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta^2 y}$, diperoleh persamaan berikut:

$$u_j^n = -\beta u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\beta)u_j^{n+1} - \beta u_{j-1}^{n+1}$$



Gambar 2.2: Skema Implisit Euler

atau

$$D_j = a_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1}$$

Terdapat tiga suku yang tidak diketahui yaitu $u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1}$. Untuk memperoleh solusi, akan dibentuk matriks $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ c_2 & b_2 & a_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & c_{M-1} & b_{M-1} & a_{M-1} \\ & & & & & b_M & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{M-1} \\ D_M \end{bmatrix}$$

atau bisa ditulis

$$\begin{aligned} b_1 u_1^{n+1} + a_1 u_2^{n+1} &= D_1 \\ c_2 u_1^{n+1} + b_2 u_2^{n+1} + a_2 u_3^{n+1} &= D_2 \\ \vdots & \\ c_{m-1} u_{m-2}^{n+1} + b_{m-1} u_{m-1}^{n+1} + a_{m-1} u_m^{n+1} &= D_{m-1} \\ c_m u_{m-1}^{n+1} + b_m u_m^{n+1} &= D_m \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut, dalam penelitian ini akan digunakan Algoritma Thomas. Algoritma Thomas adalah salah satu penyelesaian matriks tridiagonal yang efisien (Wei, dkk, 2013). Algoritma

Thomas mempunyai dua tahap yaitu: eliminasi maju dan substitusi mundur. Pada tahap pertama, diagonal bawah dieliminasi menggunakan prinsip eliminasi gaussian:

Mengalikan baris pertama dengan c_2

$$c_2 b_1 u_1^{n+1} + c_2 a_1 u_2^{n+1} = c_2 D_1 \quad (2.1)$$

Mengalikan baris kedua dengan b_1

$$b_1 c_2 u_1^{n+1} + b_1 b_2 u_2^{n+1} + b_1 a_2 u_3^{n+1} = b_1 D_2 \quad (2.2)$$

Mengurangkan Persamaan (2.1) dari Persamaan (2.2), diperoleh

$$(b_1 b_2 - c_2 a_1) u_2^{n+1} + b_1 a_2 u_3^{n+1} = b_1 D_2 - c_2 D_1 \quad (2.3)$$

Membagi Persamaan (2.3) dengan b_1

$$(b_2 - \frac{c_2 a_1}{b_1}) u_2^{n+1} + a_2 u_3^{n+1} = D_2 - \frac{c_2}{b_1} D_1 \quad (2.4)$$

Misalkan

$$b' = b_2 - \frac{c_2 a_1}{b_1}$$

dan

$$D' = D_2 - \frac{c_2}{b_1} D_1$$

Persamaan (2.4) dapat ditulis

$$b' u_2^{n+1} + a_2 u_3^{n+1} = D'$$

Selanjutnya proses eliminasi dilanjutkan sampai baris ke m sehingga diagonal bawah tereliminasi seperti matriks berikut

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ & b'_2 & a_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & b'_{M-1} & a_{M-1} \\ & & & & & & b'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D'_{M-1} \\ D'_M \end{bmatrix}$$

Pada tahap kedua dilakukan substitusi mundur dengan:

$$u_M^{n+1} = \frac{D'_M}{b'_M}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi mundur untuk memperoleh solusi u_{M-1}^{n+1} sampai dengan u_1^{n+1} . Secara umum, untuk memperoleh solusi u_j^{n+1} dapat menggunakan persamaan berikut.

$$u_j^{n+1} = \frac{D'_j - a_j u_{j+1}^{n+1}}{b'_j}, j = M-1, M-2, \dots, 2, 1$$

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Tahap Persiapan

Pada tahap ini akan dikumpulkan beberapa referensi yang mendukung penelitian baik dari buku maupun jurnal ilmiah. Selain itu pada tahap ini akan dikaji model model matematika aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola. Setiap model matematika mempunyai sifat dan karakteristik tertentu, sehingga untuk mengembangkan model matematika tersebut perlu dikaji terlebih dahulu agar mendapatkan model matematika yang sesuai dengan yang diharapkan.

2. Tahap Pemodelan

Pada tahap ini akan dilakukan dalam beberapa langkah:

- (a) Penurunan persamaan konversi massa dan hukum-hukum Fisika yang berkaitan dengan permasalahan untk mendapatkan persamaan pembangun yang dikaji.
- (b) Penentuan kondisi batas dengan melakukan pengamatan terhadap aliran fluida yang melewati bola.
- (c) Persamaan kemudian diubah secara berturut-turut menjadi model dimensional dan model non-dimensional.
- (d) Persamaan non dimensional yang diperoleh diubah ke persamaan similaritas menggunakan fungsi alir.

3. Tahap Penyelesaian Model

Persamaan non-dimensional yang telah diperoleh diselesaikan dengan skema implisit Euler. Langkah-langkah sebagai berikut:

- (a) Persamaan similaritas yang telah diperoleh didiskritisasi menggunakan beda mundur dan beda tengah deret Taylor.
- (b) Menyelesaikan sistem persamaan yang diperoleh menggunakan Algoritma Thomas.

4. Tahap Pembuatan Program dan Simulasi

Pada tahap ini akan dilakukan pembuatan program dan simulasi. Algoritma dari model yang diperoleh, diimplementasi dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab. Program yang telah dibuat dijalankan dengan memasukkan inputan dan dianalisis hasil luaran numeriknya. Tahap pembangunan model matematika dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola sampai pada hasil output program divalidasi kembali. Program yang telah dibuat selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter dan variabel inputan.

5. Tahap Analisis dan Pembahasan

Tahap ini akan berisi analisis dan pembahasan dari hasil simulasi untuk mengetahui pengaruh konveksi campuran dan medan magnet dalam magnetohidrodinamik tak tunak yang melalui bola di dalam fluida mikrokutub terhadap terhadap kecepatan mikrorotasi partikel dan kecepatan pada lapisan batas dan selanjutnya akan dibuat kesimpulan.

6. Pembuatan Laporan

7. Diseminasi hasil penelitian

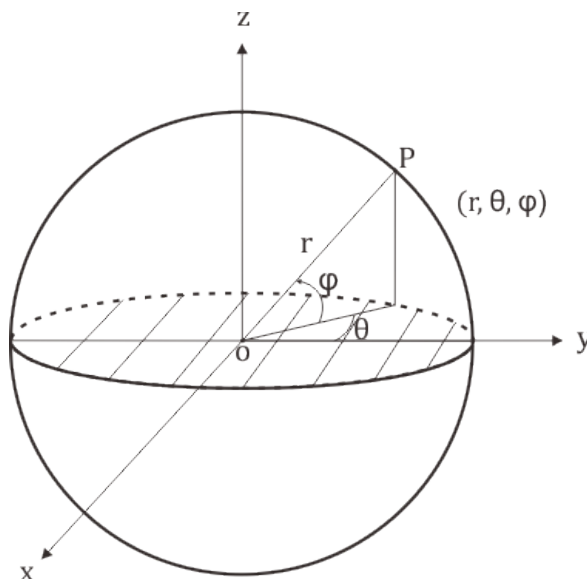
BAB 4

MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan tentang persamaan pembangun untuk membangun model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub yang melewati bola dipengaruhi oleh konveksi campuran. Model dibangun dengan penurunan hukum konservasi massa, prinsip konservasi momentum dan momentum angular, dan hukum termodinamika I. Dari hukum-hukum tersebut dapat dibangun persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan momentum angular, dan persamaan energi. Model berdimensi yang terbentuk kemudian ditransformasikan ke dalam model matematika tak berdimensi menggunakan variabel tak berdimensi. Selanjutnya model matematika tak berdimensi diubah menjadi persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas yang sesuai.

Pada penelitian ini yang diamati adalah fluida mikrokutub yang mengalir melewati bola pejal bermagnet pada lapisan batas, khususnya di titik stagnasi bawah. Gambaran dari koordinat bola dapat dilihat pada Gambar 4.1.

Untuk menggambarkan lapisan batas yang berupa elemen-elemen kecil dan

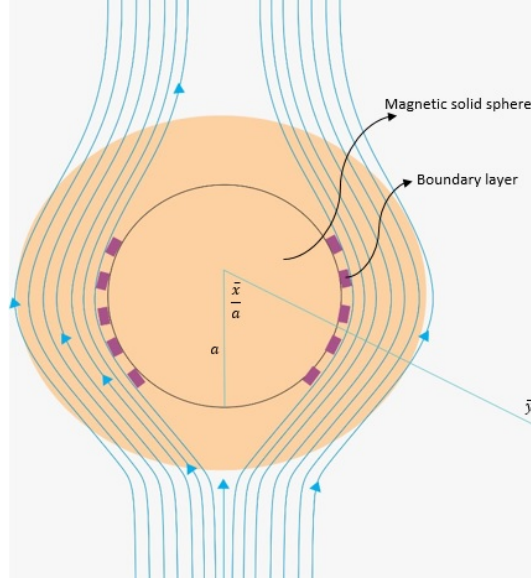


Gambar 4.1: Koordinat Bola

tipis yang terbentuk dari hasil gesekan antara fluida dengan permukaan bola

bermagnet, maka digambarkan sistem fisis seperti pada Gambar 4.2.

Pada Gambar 4.2 aliran fluida mikrokutub bergerak dari bawah ke atas.



Gambar 4.2: Sistem Fisis Fluida yang Melewati Bola Pejal

Aliran fluida yang diamati adalah di sekitar titik stagnasi bawah. Pada daerah tersebut, akan diamati kecepatan, temperatur, dan profil mikrorotasi partikel fluida mikrokutub.

4.1 Persamaan Pembangun

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Massa dari suatu sistem dapat didefinisikan sebagai jumlahan semua kerapatan (densitas) per satuan volume dari suatu sistem. Secara matematis ditulis sebagai berikut (Munson, 2012):

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (4.1)$$

Hukum konservasi massa menyatakan bahwa massa dari suatu sistem adalah tetap atau laju perubahan massa dari suatu sistem terhadap waktu adalah nol. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.2)$$

Untuk sebuah sistem dan sebuah volum yang tetap dan tidak berdeformasi berlaku Teori Transpor Reynold, yaitu laju perubahan massa terhadap waktu

pada suatu sistem dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (4.3)$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = - \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \quad (4.4)$$

Persamaan (4.4) menunjukkan bahwa laju perubahan massa pada volume yang tetap sama dengan flux massa yang melewati permukaan. Integral permukaan dapat diubah ke bentuk integral volume dengan teorema Divergensi Gauss sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \nabla(\rho \mathbf{V}) dV = - \int_{cs} (\rho \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dA$$

Sehingga Persamaan (4.4) dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV = 0 \quad (4.5)$$

Persamaan kontinuitas dapat dituliskan dalam bentuk differensial. Sehingga Persamaan (4.5) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

dengan $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ dan $\mathbf{V}(u, v, w)$ adalah vektor kecepatan dari fluida terhadap posisi, maka Persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial \bar{z}} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial \bar{z}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + \rho \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + \rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right] = 0$$

Fluida yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida yang bersifat *incompressible*. Oleh karena itu densitas bernilai konstan maka $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$. Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.7)$$

Penelitian ini dilakukan pada bola pejal. Persamaan yang telah terbentuk diubah menjadi persamaan non dimensional. Persamaan non dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similaritas menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas. Fungsi alir mempunyai dua komponen, sehingga kecepatan hanya terdapat pada sumbu- x dan sumbu- y saja. Oleh sebab itu diperoleh persamaan kontinuitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.8)$$

atau

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.9)$$

4.1.2 Persamaan momentum

Persamaan momentum dibangun dari Hukum Newton II. Hukum Newton II menyatakan bahwa laju perubahan momentum dari suatu partikel fluida sama dengan jumlah gaya yang bekerja pada partikel tersebut (Versteeg, 2007). Karena momentum merupakan perkalian massa dengan kecepatan dan massa partikel dapat didefinisikan sebagai ρdV , maka Hukum Newton II yang berlaku dalam suatu sistem dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{F} dV \quad (4.10)$$

Dengan menggunakan Teorema Green, integral permukaan pada persamaan di atas dapat diubah. Sehingga Persamaan (4.9) menjadi

$$\iiint_V \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dV + \iiint_V \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} dV = \iiint_V \mathbf{F} dV$$

$$\rho(\iiint_V (\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{V})dV) = \iiint_V \mathbf{F}dV$$

Karena

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) + (\mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}))$$

dan berdasarkan persamaan kontinuitas, yaitu $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ maka

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V})$$

sehingga Persamaan (4.9) menjadi:

$$\rho(\iiint_V (\frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}))) = \iiint_V \mathbf{F}dV \quad (4.11)$$

Jika ditulis dalam bentuk turunan, maka persamaan momentum dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} \quad (4.12)$$

\mathbf{F} adalah total gaya yang bekerja pada unit volume. Gaya yang bekerja dalam partikel fluida dibedakan menjadi dua, yaitu gaya permukaan dan gaya *body*. Gaya permukaan \mathbf{F}_s dipengaruhi oleh tekanan dan kekentalan fluida. Sedangkan dalam penelitian ini gaya *body* meliputi gaya magnetik (\mathbf{F}_m), gaya apung (\mathbf{F}_b), dan gaya angular (\mathbf{F}_a). Sehingga persamaan momentum dalam penelitian ini dapat ditulis menjadi

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b \quad (4.13)$$

1. Gaya Magnetik

Gaya magnetik (\mathbf{F}_m) yang bekerja dalam aliran fluida dapat dinyatakan dengan rumus berikut.

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.14)$$

\mathbf{E} = medan listrik

\mathbf{J} = massa jenis arus

\mathbf{B} = total medan magnet

Massa jenis arus dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$J = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.15)$$

σ = konduktivitas listrik

Dengan substitusi Persamaan (4.14) ke Persamaan (4.13) diperoleh persamaan berikut.

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.16)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa dalam aliran fluida tidak ada tegangan listrik, sehingga $\mathbf{E} = 0$. Oleh karena itu Persamaan (4.15) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\mathbf{F}_m = \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.17)$$

\mathbf{B} adalah total medan magnet yang merupakan jumlahan dari medan magnet bola pejal B_0 dengan medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh bola pejal (b).

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$$

Pada penelitian ini induksi magnetik diabaikan dikarenakan bilangan Reynold sangat kecil. Sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\mathbf{F}_m = (\sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0 \quad (4.18)$$

dengan

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k$$

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = -u(B_0)^2i - v(B_0)^2j$$

sehingga persamaan (4.17) menjadi:

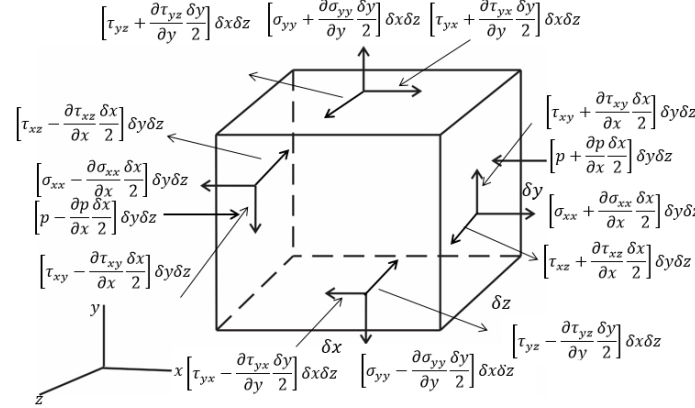
$$\mathbf{F}_m = \sigma(-u(B_0)^2, -v(B_0)^2) \quad (4.19)$$

$$\mathbf{F}_m = -\sigma(B_0)^2 \cdot \mathbf{V} \quad (4.20)$$

Karena dalam penelitian ini yang bermuatan magnet adalah benda dan benda melepaskan medan magnet ke fluida, maka yang gaya magnet yang mempengaruhi adalah $-\mathbf{F}_m$.

2. Gaya Permukaan

Gaya permukaan (\mathbf{F}_s) merupakan gaya internal pada fluida yang meliputi tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ). Gaya permukaan yang bekerja pada elemen fluida dapat dinyatakan dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan seperti pada gambar berikut:



Gambar 4.3: Komponen Tegangan pada Permukaan Elemen Fluida

Jumlah gaya permukaan dalam arah- x untuk suatu elemen kecil dari fluida dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{sx} = & \left[\bar{p} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z + \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \\ & - \left[\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z \\ & + \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{sx} = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \bar{z}} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.21)$$

Dalam arah- y , jumlah gaya permukaan dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{sy} = & \left[\bar{p} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z + \left[\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z \\ & - \left[\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z + \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \\ & + \left[\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta y \delta x - \left[\tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta y \delta x \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{sy} = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \bar{z}} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.22)$$

Sedangkan dalam arah- z , jumlah gaya permukaan dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{sz} &= \left[\bar{p} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[\bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y + \left[\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y \\
&- \left[\sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \bar{z}} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y + \left[\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \bar{x}} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \\
&+ \left[\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \bar{y}} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z \\
\mathbf{F}_{sz} &= \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \bar{z}} \right)
\end{aligned}$$

Untuk fluida mikrokutub dan *incompressible*, tegangan normal dan tegangan geser berbanding lurus terhadap laju deformasi, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

a. Tegangan normal

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2(\mu + k) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\
\sigma_{yy} &= 2(\mu + k) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\
\sigma_{zz} &= 2(\mu + k) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}
\end{aligned}$$

b. Tegangan geser

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= (\mu + k) \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right] \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= (\mu + k) \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= (\mu + k) \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right]
\end{aligned}$$

Dengan substitusi turunan dari tegangan normal dan tegangan geser tersebut pada Persamaan (4.21) dan (4.22) diperoleh

$$\mathbf{F}_s = F_{sx}i + F_{sy}j + F_{sz}k$$

Penelitian ini dilakukan pada bola pejal, sehingga kecepatan hanya terdapat pada sumbu- x dan sumbu- y saja. Oleh sebab itu diperoleh

resultan gaya permukaan sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_s = F_{sx}i + F_{sy}j$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_s &= \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + 2(\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right) i \\ &+ \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + 2(\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right) j\end{aligned}$$

Dari persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_s &= \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + (\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) i \\ &+ \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + (\mu + k)\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) j \\ \mathbf{F}_s &= -\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}j \right) + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) i \\ &+ (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) j \\ \mathbf{F}_s &= -\nabla \mathbf{p} + (\mu + k)\nabla^2 \mathbf{V}\end{aligned}\tag{4.23}$$

c. Gaya angular

Pada penelitian ini digunakan fluida mikrokutub. Pada fluida mikrokutub, terdapat adanya mikrorotasi partikel fluida. Oleh karena itu, terdapat pengaruh gaya angular(\mathbf{F}_a) pada sistem. Gaya angular tersebut adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_a = \rho f + k(\nabla \times \mathbf{N})$$

Untuk aliran fluida mikrokutub yang *incompressible*, maka koefisien materialnya bernilai konstan, sehingga $\mu > 0$ dan gaya $f = 0$, sehingga

gaya anglarnya menjadi:

$$\mathbf{F}_a = k(\nabla \times N) \quad (4.24)$$

atau

$$\mathbf{F}_a = k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} i - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} j \quad (4.25)$$

d. Gaya apung

Gaya apung (\mathbf{F}_b) dapat didefinisikan sebagai perkalian densitas fluida dengan gaya gravitasi bumi, atau $\mathbf{F}_b = \rho \mathbf{g}$. Sehingga Persamaan (4.13) menjadi

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\sigma(B_0)^2 \cdot \mathbf{V} + k(\nabla \times N) - \nabla p + (\mu + k)\nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

Tekanan p pada Persamaan (4.23) dapat didefinisikan dengan jumlahan tekanan hidrostatik (p_h) dengan tekanan dinamik (p_d).

$$p = p_h + p_d \quad (4.26)$$

Bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik dapat dijelaskan oleh persamaan berikut:

$$\nabla p_h = \rho_\infty \mathbf{g} \quad (4.27)$$

ρ_∞ adalah densitas fluida di luar lapisan batas. Karena gaya gravitasi didefinisikan oleh $\mathbf{g} = (g_x, g_y, 0)$, maka gradien dari tekanan adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_h}{\partial \bar{x}} &= \rho_\infty g_x \\ \frac{\partial \bar{p}_h}{\partial \bar{y}} &= \rho_\infty g_y \end{aligned}$$

Sehingga turunan tekanan p terhadap sumbu-x adalah

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}_d}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{p}_h}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}_d}{\partial \bar{x}} - \rho_\infty g_x \quad (4.28)$$

turunan tekanan p terhadap sumbu-y adalah

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}_d}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{p}_h}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}_d}{\partial \bar{y}} - \rho_\infty g_y \quad (4.29)$$

Sehingga Persamaan gaya permukaan (4.13) menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) \right) = -\nabla \mathbf{p} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} + (\mu + k) \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma (B_0)^2 \cdot \mathbf{V} + k (\nabla \times \mathbf{N}) \quad (4.30)$$

Dengan substitusi dari Persamaan (4.20), (4.23), (4.25), (4.28), (4.29) dan dengan mengelompokkan vektor i dan j diperoleh persamaan momentum sumbu- x yaitu:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (4.31)$$

Sedangkan persamaan momentum sumbu- y , yaitu:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \quad (4.32)$$

Persamaan momentum sumbu- z :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad (4.33)$$

Sesuai dengan pendekatan Boussineq yaitu semua variabel yang berpengaruh dalam Persamaan Momentum (4.31) dan (4.32) diabaikan, kecuali kerapatan. Pendekatan Boussineq ini diterapkan pada Persamaan (4.31) dan (4.32) untuk mendekati perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran sebagai akibat dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti pengaruh temperatur.

Menurut Leal (1992), diasumsikan bahwa nilai maksimum $(\bar{T} - T_\infty)$ kecil. Sehingga berdasarkan definisi pendekatan Deret Taylor yaitu:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2$$

Dengan menghilangkan bagian berorder tinggi, diperoleh persamaan:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty)$$

$$(\rho_\infty - \rho) = \beta\rho(\bar{T} - T_\infty) \quad (4.34)$$

β adalah koefisien ekspansi panas. Substitusi Persamaan (4.33) ke Persamaan (4.31) dan (4.32), didapatkan persamaan momentum sumbu- x berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \beta\rho(\bar{T} - T_\infty)g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (4.35)$$

Persamaan momentum sumbu- y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \beta\rho(\bar{T} - T_\infty)g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \quad (4.36)$$

Persamaan momentum sumbu- z :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad (4.37)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal. Persamaan yang telah terbentuk diubah menjadi persamaan non dimensional. Persamaan non dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similaritas menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas. Fungsi alir mempunyai dua komponen, sehingga komponen pada sumbu- z dapat diabaikan. Sehingga diperoleh persamaan momentum sebagai berikut: Persamaan momentum sumbu- x :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \beta\rho(\bar{T} - T_\infty)g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (4.38)$$

Persamaan momentum sumbu- y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \beta\rho(\bar{T} - T_\infty)g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \quad (4.39)$$

Dengan kondisi batas saat $t < 0$ yang berarti bahwa sebelum dilakukan pengamatan sebagai berikut:

$$\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w, \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty, \text{ pada } \bar{y} \longrightarrow \infty$$

4.1.3 Persamaan Momentum Angular

Pada penelitian ini digunakan fluida mikrokutub. Partikel-partikel dalam fluida mikrokutub berorientasi secara acak pada media kental dan memiliki mikrorotasi. Partikel-partikel tersebut terkandung dalam elemen volume kecil yang dapat memutar pusat volume, sehingga pada fluida mikrokutub terdapat adanya momentum angular.

Momentum angular terdiri dari momentum angular eksternal ($\rho x \times \mathbf{v}$) dan momentum angular internal (ρl). Sehingga momentum angular total adalah (Lukaszewicz, 1999)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(l + x \times \mathbf{V}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(g + x \times f) dx + \int_{\Omega(t)} (c_n + x \times t_n) dS$$

$t_n = n \cdot T = \text{tegangan normal}$

$g = \text{body torque}$

$\mathbf{f} = \text{body force}$

$c_n = n \cdot C = \text{couple stress}$

$C = \text{couple stress tensor}$

Persamaan tersebut juga bisa ditulis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(l + x \times \mathbf{V}) dx &= \int_{\Omega(t)} (\rho \mathbf{g} + \rho x \times \mathbf{f} + \nabla \cdot C + x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx \\ \rho \frac{D}{Dt} (l + x \times \mathbf{V}) &= \rho \mathbf{g} + \rho x \times \mathbf{f} + \nabla \cdot C + x \times (\nabla \cdot T) + T_x \end{aligned} \quad (4.40)$$

Berdasarkan Teorema Green:

$$\int_{\Omega(t)} x \times t_n dS = \int_{\Omega(t)} (x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx$$

dan hukum konservasi momentum angular:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x \times \mathbf{V}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x \times f) dx + \int_{\Omega(t)} x \times t_n dS$$

diperoleh bahwa

$$\int_{\Omega(t)} x \times \left(\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot T \right) dx = \int_{\Omega(t)} T_x dx$$

$$\rho x \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \rho \mathbf{f}x - x(\nabla \cdot T) = T_x$$

Pada Persamaan Cauchy, $T_x = 0$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\rho(x \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt}) = \rho x \times \mathbf{f} + x \times (\nabla \cdot T) \quad (4.41)$$

Dengan mengurangkan Persamaan (4.37) ke persamaan (4.36), diperoleh:

$$\rho \frac{Dl}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.42)$$

dan karena

$$\nabla \cdot (x \times T) = x \times (\nabla \cdot T) + T_x$$

sehingga Persamaan (4.38) menjadi

$$\rho \frac{D}{Dt}(x \times \mathbf{V}) = \rho x \times \mathbf{f} + \nabla \cdot (x \times T) - T_x \quad (4.43)$$

Dari persamaan (4.38), dan (4.39) diperoleh hukum konservasi momentum angular sebagai berikut

$$\rho \frac{D}{Dt}(l + x \times \mathbf{V}) = \rho x \times \mathbf{f} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (x \times T + C) \quad (4.44)$$

Dengan mengasumsikan bahwa momentum angular internal dituliskan dengan vektor komponen $j_i (i = 1, 2, 3)$ dan $j_i = j_{ik}\omega_k$, maka Persamaan (4.38) dapat direduksi menjadi:

$$\rho j \frac{D\omega}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot C + T_x$$

dimana j adalah koefisien mikro inersia dan fluida merupakan fluida mikrokutub yang isotropik, sehingga $j_{ik} = j\delta_{ik}$.

Dengan menggunakan Teorema Transpor Reynold, diperoleh bahwa

$$\rho j \frac{D\omega}{Dt} = \rho j \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \omega) \right)$$

Fluida mikrokutub didefinisikan sebagai fluida *isotropic* dengan *couple stress tensor* C dan *stress tensor* T_x (Lukaszewicz, 1999).

$$C_{ij} = \alpha \omega_{k,k} + \beta \omega_{i,j} + \gamma \omega_{j,i} \quad (4.45)$$

$$T_x = e_{ijk}T_{jk} = 2ke_{ikm}u_{m,k} - 2k\omega_i \quad (4.46)$$

Persamaan (4.42) dan (4.43) dapat dinyatakan dalam notasi vektor Gibbsi sebagai berikut:

$$\nabla C = (\alpha + \beta)\nabla^2\omega + \gamma\nabla^2 \cdot \omega$$

$$\nabla C = (\alpha + \beta)\nabla^2\omega + \gamma\nabla^2 \cdot \omega - \gamma\nabla \times (\nabla \times \omega)$$

$$\nabla C = (\alpha + \beta + \gamma)\nabla^2\omega - \gamma\nabla \times (\nabla \times \omega)$$

$$\nabla C = -\gamma\nabla \times (\nabla \times \omega)$$

dan

$$T_x = k\nabla \times \mathbf{V} - 2k\omega$$

dengan melakukan substitusi tensor C , T_x , dan $\omega = \mathbf{N}$, maka diperoleh:

$$\rho j \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{N}) \right) = -\gamma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{N}) + k(-2\mathbf{N} + \nabla \times \mathbf{V}) \quad (4.47)$$

\mathbf{N} = daerah mikrorotasi $(0, 0, \bar{N})$

k = viskositas rotasi

j = densitas mikro inersia

γ = gradien viskositas

sehingga persamaan(4.43)dapat ditulis

$$\begin{aligned} \rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{z}} \right) &= \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}} \right) \\ &- k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned}$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal. Persamaan yang telah terbentuk diubah menjadi persamaan non dimensional. Persamaan non dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similaritas menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas. Fungsi alir mempunyai dua komponen, sehingga perubahan kecepatan dan perubahan kecepatan mikrorotasi pada arah sumbu- z diabaikan. Sehingga diperoleh persamaan momentum angular sebagai berikut:

$$\rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.48)$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas saat sebagai berikut:

$$\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0 \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ pada } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0 \text{ pada } \bar{y} \longrightarrow \infty$$

4.1.4 Persamaan Energi

Pada penelitian ini terdapat adanya pengaruh konveksi campuran. Adanya pengaruh konveksi campuran menyebabkan fluida bergerak dari bawah ke atas. Kemudian fluida tersebut mengalami perbedaan temperatur yang mengakibatkan adanya perbedaan kerapatan. Sebagai akibat adanya perbedaan temperatur, terdapat perpindahan energi yang berupa kalor antara media (bola) dengan fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya Hukum Termodinamika I yang menyebutkan bahwa laju pertambahan energi total yang tersimpan dalam sebuah sistem sama dengan penjumlahan laju rata-rata perpindahan panas dalam sistem dengan laju rata-rata perpindahan usaha dalam sistem (Munson, 2012). Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut .

$$\Delta E = (\sum Q_{in} - \sum Q_{out})_{sys} + (\sum W_{in} - \sum W_{out})_{sys} \quad (4.49)$$

atau

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \rho e \mathbf{V} d\mathbf{S} = (Q_{netin} + W_{netin})$$

dimana Q adalah energi kalor, W adalah usaha, dan e adalah energi total per satuan massa partikel dalam sistem.

$$e = \hat{u} + \frac{v^2}{2} + gz$$

\hat{u} = energi internal per satuan massa

$\frac{v^2}{2}$ = energi kinetik per satuan massa

gz = energi potensial per satuan massa

Integral permukaan dalam persamaan di atas dapat diubah menggunakan Teorema Green menjadi persamaan berikut

$$\iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV + \iiint_V \rho \nabla \cdot e \mathbf{V} dV = (Q_{netin} + W_{netin}) \quad (4.50)$$

$$\rho(\iiint_V (\frac{de}{dt} + \nabla \cdot e\mathbf{V})dV) = (Q_{netin} + W_{netin}) \quad (4.51)$$

Karena

$$\nabla \cdot e\mathbf{V} = e \cdot \nabla \mathbf{V} + e \nabla \cdot \mathbf{V}$$

dengan persamaan kontinuitas $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ diperoleh $\nabla \cdot e\mathbf{V} = e \cdot \nabla \mathbf{V}$. Sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \rho(\iiint_V (\frac{de}{dt} + e \cdot \nabla \mathbf{V})dV) &= (Q_{netin} + W_{netin}) \\ \rho(\iiint_V \frac{De}{Dt}dV) &= (Q_{netin} + W_{netin}) \\ \iiint_V \rho \frac{De}{Dt}dV &= (Q_{netin} + W_{netin}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Laju perubahan energi per satuan volume adalah

$$\rho \frac{De}{Dt} \quad (4.53)$$

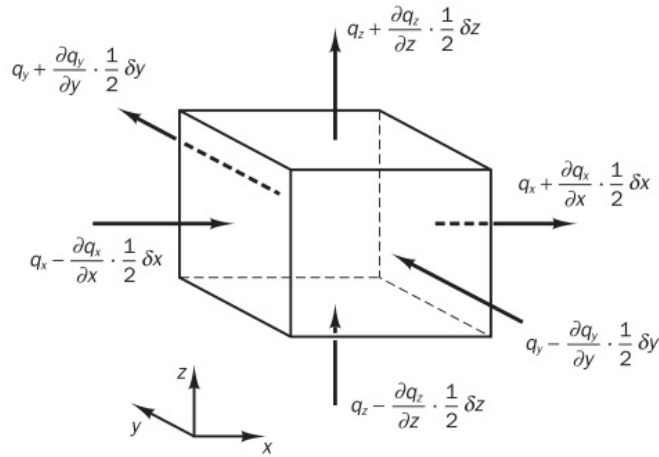
Vektor *heat flux* q dalam volume kontrol terdiri dari komponen q_x, q_y, q_z yang ditunjukkan pada gambar berikut:

Laju netto perpindahan panas pada partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah- x , arah- y , dan arah- z sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x)] - [(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x)] \delta y \delta z &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \\ [(q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y)] - [(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y)] \delta x \delta z &= -\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \\ [(q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z)] - [(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z)] \delta x \delta y &= -\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

Sehingga total laju netto pertambahan energi dari kalor per satuan volume adalah:

$$-(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z})$$



Gambar 4.4: Komponen *heat flux* pada volume kontrol (Versteeg, 2007)

Laju total pertambahan energi kalor pada partikel fluida per satuan volume dalam arah $-x$ dan y adalah:

$$\left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (4.54)$$

Hukum Fourier tentang konduksi panas tentang hubungan *heat flux* dengan gradien temperatur lokal, yaitu:

$$q_x = -c \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -c \frac{\partial T}{\partial y}$$

atau

$$\mathbf{q} = (-c \nabla T) \quad (4.55)$$

c adalah konduktivitas panas. Dengan substitusi Persamaan (4.55) ke Persamaan (4.54), diperoleh

$$(-\nabla \cdot \mathbf{q}) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.56)$$

Entalpi untuk sebarang substansi didefinisikan sebagai berikut (Versteeg, 2007)

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Sehingga laju perubahan energi Persamaan (4.55) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\rho \frac{De}{Dt} &= \rho \left[\frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right] \\ &= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}\end{aligned}$$

Karena tekanan tetap, maka $\frac{DP}{Dt} = 0$. Pada penelitian ini digunakan fluida mikrokutub, sehingga bersifat *incompressible*. Oleh karena itu $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} \quad (4.57)$$

Usaha didefinisikan sebagai perkalian tekanan dan volume. Untuk tekanan yang tetap, Persamaan (4.45) dapat ditulis menjadi

$$\Delta Q = \Delta E - \Delta W$$

$$\Delta Q = (E_2 - E_1) - (pV_1 - pV_2)$$

$$mC_p\Delta T = (E_2 + pV_2) - (E_1 + pV_1)$$

Karena reaksi panas (H) dirumuskan sebagai

$$H = E + pV$$

maka

$$\Delta H = mC_p\Delta T$$

$$\frac{\Delta H}{m} = C_p\Delta T$$

$$\Delta h = C_p\Delta T$$

Sehingga diperoleh

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho C_p\Delta T = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{V}) \right)$$

Akibatnya Persamaan (4.52) menjadi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (c\nabla T) + \Delta W \quad (4.58)$$

Dalam penelitian ini perubahan entalpi yang disebabkan oleh energi kinetik cukup kecil. Sehingga laju usaha yang bekerja pada fluida sama dengan nol. Diperoleh persamaan berikut

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.59)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) + T (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) maka diperoleh

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}}$$

dan

$$\nabla \cdot (c \nabla T) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Sehingga diperoleh persamaan energi sebagai berikut

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (4.60)$$

Untuk $\lambda = \frac{c}{\rho C_p}$, persamaan energi menjadi:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (4.61)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal. Persamaan yang telah terbentuk diubah menjadi persamaan non dimensional. Persamaan non dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similaritas menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas. Fungsi alir mempunyai dua komponen, sehingga perubahan temperatur pada arah sumbu- z diabaikan. Selanjutnya diperoleh persamaan momentum angular sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.62)$$

4.2 Persamaan Pembangun Dimensional

Berdasarkan uraian dari sub bab (4.1) diperoleh persamaan pembangun dimensional pada magnetohidrodinamik fluida mikroktub tak tunak yang mengalir melalui bola pejal dipengaruhi oleh konveksi campuran berikut:

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.63)$$

2. Persamaan momentum Persamaan momentum sumbu- x :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (4.64)$$

Persamaan momentum sumbu- y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \quad (4.65)$$

3. Persamaan momentum angular

$$\rho J \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.66)$$

4. Persamaan energi

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.67)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0, \bar{T} = T_\infty$, untuk setiap \bar{x}, \bar{y}

$\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \bar{T} = T_w$, pada $\bar{y} = 0$

$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x})r(\bar{x}), \bar{N} = 0, \bar{T} = T_\infty$, pada $\bar{y} \rightarrow \infty$

4.3 Transformasi Variabel Tak Berdimensi

Persamaan pembangun yang diperoleh dalam bentuk berdimensi, selanjutnya akan ditransformasikan menjadi bentuk non-dimensi. Hal ini dilakukan untuk memudahkan perhitungan dan agar hasil yang diperoleh

tidak terikat oleh dimensi atau satuan. Dengan memperhatikan besaran-besaran yang digunakan dalam penelitian ini, diperoleh variabel-variabel tak berdimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{x}}{a} & y &= Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a} & t &= \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a} & u &= \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \\
 v &= Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}} & p &= \frac{\bar{p}}{\rho U_{\infty}^2} & r(x) &= \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a} & N &= \frac{a \bar{N}}{Re^{\frac{1}{2}} U_{\infty}} \\
 T &= \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} & g_{\bar{x}} &= g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) = -g \sin x & g_{\bar{y}} &= g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) = g \cos x
 \end{aligned}$$

Re adalah bilangan Reynolds, dimana $Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$ dan ν adalah viskositas kinematik. Viskositas kinematik dapat didefinisikan sebagai perbandingan viskositas dinamis dengan densitas atau $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi tersebut ke dalam persamaan-persamaan pembangun yang telah terbentuk. Parameter-parameter tak berdimensi yang digunakan untuk mendapatkan persamaan-persamaan tak berdimensi antara lain:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \left(\mu + \frac{k}{2}\right)j \\
 j &= \frac{av}{U_{\infty}} & \text{atau} & & j &= \frac{v}{c} \\
 K &= \frac{k}{\mu} \\
 M &= \frac{a \sigma B_0^2}{\rho U_{\infty}} \\
 Gr &= \frac{g \beta (T_w - T_{\infty}) a^3}{v^3} \\
 \alpha &= \frac{Gr}{Re^2} \\
 Pr &= \frac{v \rho C_p}{c}
 \end{aligned}$$

γ adalah gradien viskositas, j adalah densitas mikroinersia, K adalah parameter bahan mikrokutub, M adalah parameter magnetik, Gr adalah bilangan grashof, dan Pr adalah bilangan prandtl. Sehingga diperoleh persamaan-persamaan non-dimensi berikut :

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.68)$$

Persamaan momentum sumbu- x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T \sin x + \frac{1+K}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + K \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.69)$$

Persamaan momentum sumbu- y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\alpha}{Re^{\frac{1}{2}}} T \cos x + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+K}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Mv}{Re} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.70)$$

Persamaan momentum angular:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + \frac{K}{2}) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.71)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.72)$$

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, maka kondisi awal dan kondisi batas diberikan :

$t = 0 : u = v = N = 0, T = 0$, untuk setiap x, y

$t > 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, T = 1$, pada $y = 0$

$u = u_e(x)r(x), N = 0, T = 0$, pada $y \rightarrow \infty$

4.4 Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas

Persamaan pembangun yang diperoleh cukup kompleks. Oleh karena itu diperlukan teori lapisan batas yang dikenalkan oleh Prandtl (1904) untuk menyederhanakan persamaan. Lapisan batas yang terbentuk dari magnetohidrodinamik yang tak tunak yang mengalir melalui bola adalah sebuah lapisan yang sangat tipis dan bilangan Reynoldsnnya mendekati tak hingga, $Re \rightarrow \infty$ atau $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$. Hal ini berpengaruh pada persamaan non-dimensi yang telah terbentuk. Dengan substitusi $\frac{1}{Re} = 0$, diperoleh persamaan berikut:

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.73)$$

2. Persamaan momentum sumbu- x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T \sin x + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + K \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.74)$$

3. Persamaan momentum sumbu- y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.75)$$

4. Persamaan momentum angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + \frac{K}{2}) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K(2N + \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (4.76)$$

5. Persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.77)$$

Berdasarkan Persamaan (4.74), tekanan tidak mempengaruhi persamaan momentum sumbu- y . Dengan demikian persamaan momentum yang ada pada sistem menjadi persamaan momentum sumbu- x saja. Sehingga pada persamaan momentum untuk aliran bebas pada fluida yang mengalir melalui bola bermagnet adalah:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T \sin x + (1+K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + Mu_e + K \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.78)$$

Pada kecepatan aliran bebas dimana $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, maka diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0$$

Substitusi ke Persamaan (4.78), diperoleh persamaan berikut:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T \sin x + Mu_e + K \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.79)$$

Dan untuk $T = 0$ dan $N = 0$, persamaan (4.79) berubah menjadi:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + M u_e \quad (4.80)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - M u_e \quad (4.81)$$

Selanjutnya dengan substitusi Persamaan (4.81) ke Persamaan (4.74) diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M(u - u_e) - \frac{2}{3} \alpha T u_e + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.82)$$

4.5 Fungsi Alir

Persamaan yang telah diperoleh dari sistem mengandung banyak variabel, oleh karena itu akan dilakukan penyederhanaan. Penyederhanaan juga bertujuan untuk mempermudah proses komputasi. Penyederhanaan dilakukan dengan fungsi alir. Fungsi alir komponen u dan v didefinisikan sebagai berikut (White, 2009):

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.83)$$

Substitusi persamaan (4.76) ke Persamaan (4.66), (4.69), (4.70), dan (4.75), sehingga diperoleh persamaan berikut:

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.84)$$

2. Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right. \\ \left. - u_e \right) + \frac{2}{3} \alpha T u_e + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{2N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.85)$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \quad (4.86)$$

4. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.87)$$

Dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} t = 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = N = 0, T = 0, \text{ untuk setiap } x, y \\ t > 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, N = -n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, T = 1, \text{ pada } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x)r(x), N = 0, T = 0, \text{ pada } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

4.6 Persamaan Similaritas

Persamaan pada fungsi alir selanjutnya akan diubah ke dalam variabel-variabel similaritas. Persamaan momentum dan persamaan momentum angular ditransformasikan ke dalam variabel similaritas yang terdiri dari dua tipe waktu, yaitu waktu kecil (*small time*) dan waktu besar (*large time*).

Untuk waktu yang kecil ($t \leq t^*$) dengan sebarang nilai t , menurut (Mohammad, 2012), diberikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \psi &= t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \\ \eta &= \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \\ N &= t^{\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\ T &= s(x, \eta, t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi persamaan tersebut ke persamaan momentum, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} (1 + K) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{2}{3} \alpha s t + \frac{du_e}{dx} t \left(1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Persamaan (4.88) disubstitusikan ke persamaan momentum angular, diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + K t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Persamaan energi

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right) \quad (4.91)$$

Dengan kondisi batas:

$$t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1, \text{ pada } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = s = 0 \text{ pada } \eta \longrightarrow \infty$$

Variabel similiaritas untuk Large Time ($t \geq t^*$) yaitu :

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t)$$

$$Y = y$$

$$T = S(x, Y, t)$$

$$N = u_e(x) H(x, Y, t) \quad (4.92)$$

Dengan menyubtitusikan variabel similiaritas pada persamaan momentum dan momentum angular, maka diperoleh

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned} (1 + K) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) + K \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right) + M \left(\frac{\partial F}{\partial Y} - 1 \right) + \frac{2}{3} \alpha S + \frac{du_e}{dx} (1 + F) \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \right) + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{F}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Persamaan momentum angular:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} \right) + \frac{du_e}{dx} \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{F}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y} \right) \\ + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{du_e}{dx} \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dS}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{F}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right) \quad (4.95)$$

Dengan kondisi batas:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, S = 1, \text{ pada } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, H = S = 0 \text{ pada } Y \longrightarrow \infty$$

Subtitusi $u_e = \frac{3}{2} \sin x, r = \sin x, \frac{dr}{dx} = \cos x$ dan $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2} \cos x$ pada persamaan

small time diperoleh persamaan berikut:

Persamaan momentum

$$\begin{aligned}
(1 + K)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + K\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}\cos xt\left(1 + f\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right. \\
\left. - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right) = t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t}\right) + \frac{3}{2}\sin xt\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r}\cos x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
(1 + K)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + K\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}\cos xt\left(1 + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right. \\
\left. - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right) = t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t}\right) + \frac{3}{2}\sin xt\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \quad (4.96)
\end{aligned}$$

Persamaan momentum angular

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{K}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}\cos x t\left(f\frac{\partial h}{\partial \eta} - h\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = t\frac{\partial h}{\partial t} + \\
\frac{3}{2}\sin x t\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{\sin x}\cos x \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + Kt\left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
\left(1 + \frac{K}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}\cos x t\left(2f\frac{\partial h}{\partial \eta} - h\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
= t\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x t\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + Kt\left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \quad (4.97)
\end{aligned}$$

Persamaan energi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr\frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt\frac{3}{2}\cos x \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{f}{\sin x}\cos x \frac{\partial s}{\partial \eta}\right)\right) \\
\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr\frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{3}{2}Pr t \sin x\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta}\right) - 3Pr t f \cos x \frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (4.98)
\end{aligned}$$

Persamaan untuk *large time*

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned}
(1 + K)\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}\right) + K\left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right) + M\left(\frac{\partial F}{\partial Y} - 1\right) + \frac{2}{3}\alpha S + \frac{3}{2}\cos x\left(1 + F\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right. \\
\left. - \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2\right) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t}\right) + \frac{3}{2}\sin x\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{F}{\sin x}\cos x \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + K)(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}) + K(\frac{\partial H}{\partial Y}) + M(\frac{\partial F}{\partial Y} - 1) + \frac{2}{3}\alpha S + \frac{3}{2}\cos x(1 + 2F\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
-(\frac{\partial F}{\partial Y})^2) = (\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t}) + \frac{3}{2}\sin x(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2})
\end{aligned} \quad (4.99)$$

Persamaan momentum angular:

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{K}{2})(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}) + \frac{3}{2}\cos x(F\frac{\partial H}{\partial Y} - H\frac{\partial F}{\partial Y}) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{F}{\sin x}\cos x \frac{\partial H}{\partial Y} \\
- \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y}) + K(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{K}{2})(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}) + \frac{3}{2}\cos x(2F\frac{\partial H}{\partial Y} - H\frac{\partial F}{\partial Y}) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y}) \\
+ K(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2})
\end{aligned} \quad (4.100)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + PrF\frac{3}{2}\cos x \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dS}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{F}{\sin x}\cos x \frac{\partial S}{\partial Y}))$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2}\sin x(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dS}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y}) - 3Pr F\cos x \frac{\partial S}{\partial Y} \quad (4.101)$$

Pada penelitian ini, fokus penelitian pada bagian bawah titik stagnasi yaitu ($x = 0$), dengan demikian maka nilai $\sin x = 0$ dan $\cos x = \frac{3}{2}$, sehingga persamaan momentum, momentum angular dan energi *small time* yaitu :

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned}
(1 + K)(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}) + K(\frac{\partial h}{\partial \eta}) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t(1 + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - (\frac{\partial f}{\partial \eta})^2) \\
= t(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t})
\end{aligned} \quad (4.102)$$

Persamaan momentum angular:

$$(1 + \frac{K}{2})(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(2f\frac{\partial h}{\partial \eta} - h\frac{\partial f}{\partial \eta}) = t\frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}) \quad (4.103)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr\frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt\frac{\partial s}{\partial t} - 3Prtf\frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (4.104)$$

Dengan kondisi batas:

$$t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1, \text{ pada } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = s = 0 \text{ pada } \eta \longrightarrow \infty$$

Sedangkan untuk *large time* Persamaan (4.89)-(4.91) menjadi:

Persamaan momentum

$$\begin{aligned} (1 + K) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) + K \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right) + M \left(\frac{\partial F}{\partial Y} - 1 \right) - \frac{2}{3} \alpha S + \frac{3}{2} \left(1 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.105)$$

Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} \right) + \frac{3}{2} \left(2F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.106)$$

Persamaan energi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} - 3PrF \frac{\partial S}{\partial Y} \quad (4.107)$$

dengan kondisi batas:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, S = 1, \text{ pada } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, H = S = 0 \text{ pada } Y \longrightarrow \infty$$

Untuk $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$, $\frac{\partial h}{\partial \eta} = h'$ dan $\frac{\partial s}{\partial \eta} = s'$ maka persamaan momentum, persamaan momentum angular, dan persamaan energi untuk *small time* menjadi:

a. Persamaan momentum

$$(1 + K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' + Mt(1 - f') + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t(1 + ff'' - (f')^2) = t \left(\frac{\partial f'}{\partial t} \right) \quad (4.108)$$

b. Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) h'' + \frac{\eta}{2} h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2} t (fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + f'') \quad (4.109)$$

c. Persamaan energi

$$s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + \frac{3}{2} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.110)$$

Dengan kondisi batas:

$t = 0 : f = f' = h = s = 0$ untuk setiap x, η

$t > 0 : f = f' = 0, h = -n f'', s = 1$, pada $\eta = 0$

$f' = 1, h = s = 0$ pada $\eta \rightarrow \infty$

Untuk $\frac{\partial F}{\partial Y} = F', \frac{\partial H}{\partial Y} = H'$ dan $\frac{\partial S}{\partial Y} = S'$, persamaan momentum, persamaan momentum angular, dan persamaan energi untuk *large time* menjadi:

a. Persamaan momentum

$$(1+K)F''' + KH' + M(1-F') + \frac{2}{3}\alpha S + \frac{3}{2}(1+FF'' - (F')^2) = \left(\frac{\partial F'}{\partial t}\right) \quad (4.111)$$

b. Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)H'' + \frac{3}{2}(FH' - HF') = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + F'') \quad (4.112)$$

c. Persamaan energi

$$S'' + \frac{3}{2} Pr F S' = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.113)$$

dengan kondisi batas:

$F = F' = 0, H = -n F'', S = 1, B_0 > 0$ pada $Y = 0$

$F' = 1, H = S = B_0 = 0$ pada $Y \rightarrow \infty$

Dengan mensubstitusikan $t = 0$ ke dalam Persamaan (4.102)-(4.104), kemudian diintegrasikan dengan kondisi batas, dapat diperoleh kondisi awal untuk fungsi f, f', f'', h, h', s , dan s' sebagai berikut:

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1+n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}}(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1)$$

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1+n))}}\right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1 + K(1 - n))} e^{\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

Dengan $h = -nf''$ sebagai kondisi batas, diperoleh:

$$h = \frac{-n}{\sqrt{\pi}(1 + K(1 - n))} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

$$h' = \frac{-n\eta}{2(1 + K(1 - n))\sqrt{\pi}(1 + K(1 - n))} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

$$s = -erf(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}) + 1$$

$$s' = \sqrt{\frac{Pr}{\pi}} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}$$

BAB 5

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada Bab ini akan dibahas penyelesaian dan simulasi numerik dari model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola dipengaruhi konveksi campuran yang telah diperoleh pada Bab 4. Penyelesaian yang digunakan adalah dengan menggunakan skema implisit euler.

5.1 Diskritisasi Model

Model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang melewati bola dipengaruhi konveksi campuran pada titik stagnasi diberikan sebagai berikut:

Small time Persamaan momentum :

$$(1 + K)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + K\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t\left(1 + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right) = t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t}\right) \quad (5.1)$$

Persamaan momentum angular:

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t\left(2f\frac{\partial h}{\partial \eta} - h\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = t\frac{\partial h}{\partial t} + Kt\left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \quad (5.2)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr\frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt\frac{\partial s}{\partial t} - 3Prtf\frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (5.3)$$

Dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = s = 0 \text{ pada } \eta \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Large time

Persamaan momentum

$$\begin{aligned} (1 + K)\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}\right) + K\left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right) + M\left(\frac{\partial F}{\partial Y} - 1\right) - \frac{2}{3}\alpha S + \frac{3}{2}\left(1 + 2F\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2\right) \\ = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}\right) + \frac{3}{2}\left(2F\frac{\partial H}{\partial Y} - H\frac{\partial F}{\partial Y}\right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K\left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right) \quad (5.5)$$

Persamaan energi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} = Pr\frac{\partial S}{\partial t} - 3PrF\frac{\partial S}{\partial Y} \quad (5.6)$$

dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, H = -n\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, S = 1, \text{ pada } Y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = 1, H = S = 0 \text{ pada } Y \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

5.1.1 Diskritisasi Model Persamaan Momentum Untuk *small time*

Dengan substitusi $\frac{\partial f}{\partial \eta} = u$, maka Persamaan (5.1) menjadi

$$\begin{aligned} (1 + K)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + K\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + \frac{\eta}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + Mt(u - 1) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t\left(1 + 2f\frac{\partial u}{\partial \eta} - (u)^2\right) \\ = t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dengan metode implisit Euler, diperoleh diskritisasi berikut

$$\begin{aligned} (1 + K)\frac{1}{\Delta\eta^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + K\frac{1}{2\Delta\eta} (3h_{i+1}^{n+1} - 4h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) \\ + \frac{\eta_i}{2} \left(\frac{3u_{i+1}^{n+1} - 4u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) + Mt^{n+1} (u_i^{n+1} - 1) + \frac{2}{3}\alpha s_i^n t^{n+1} \\ + \frac{3}{2} t^{n+1} \left(1 - (u_i^{n+1})^2 + 2f_i^n \frac{1}{2\Delta\eta} (3u_{i+1}^{n+1} - 4u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \right) \\ = t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}) \end{aligned}$$

Dengan substitusi $u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& (1+K) \frac{1}{\Delta \eta^2} (u_{i+1}^n + \Delta u_{i+1}^n - 2u_i^{n+1} - 2\Delta u_i^n + u_{i-1}^{n+1} + \Delta u_{i-1}^n) \\
& + K \frac{1}{2\Delta \eta} (3h_{i+1}^{n+1} - 4h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) + \frac{\eta_i}{4} (3u_{i+1}^n + 3\Delta u_{i+1}^n - 4u_i^n - 4\Delta u_i^n \\
& + u_{i-1}^n + \Delta u_{i-1}^n) + Mt^{n+1} (u_i^n + \Delta u_i^n - 1) + \frac{2}{3} \alpha s_i^n t^{n+1} + \frac{3}{2} t^{n+1} (1 - (u_i^n + \Delta u_i^n)^2 \\
& + 2f_i^n \frac{1}{2\Delta \eta} (3u_{i+1}^n + 3\Delta u_i^n - 4u_i^n - 4\Delta u_i^n + u_{i-1}^n + \Delta u_{i-1}^n)) \\
& = t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta u_i^n - \Delta u_i^{n-1})
\end{aligned}$$

Untuk

$$\begin{aligned}
Pi &= \frac{1}{2} \frac{t_i^{n+1}}{\Delta t} \Delta u_i^{n-1} + (1+K) \frac{1}{\Delta \eta^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + K \frac{1}{2\Delta \eta} (3h_{i+1}^{n+1} - 4h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) \\
& + \frac{\eta_i}{4} \frac{1}{\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{3}{2} t^{n+1} \left(1 - (u_i^n)^2 + \frac{f_i^n}{\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n) \right) \\
& + t^{n+1} M(u_i^n - 1) + \frac{2}{3} \alpha s_i^n t^{n+1}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} 3\Delta u_i^n - (1+K) \frac{1}{\Delta \eta^2} (\Delta u_{i+1}^n - 2\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) - \frac{\eta_i}{4} \frac{1}{\Delta \eta} (3\Delta u_{i+1}^n \\
& - 4\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) + \frac{3}{2} t^{n+1} 2u_i^n \Delta u_i^n - \frac{3}{2} t^{n+1} \frac{f_i^n}{\Delta \eta} (3\Delta u_{i+1}^n - 4\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) \\
& - t^{n+1} M \Delta u_i^n = Pi
\end{aligned} \tag{5.9}$$

dan untuk

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{4} \frac{\eta_i}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} t^{n+1} f_i^n \frac{1}{\Delta \eta} \\
A_1 &= \frac{(1+K)}{\Delta \eta^2} + A_0 \\
A_2 &= \frac{3(1+K)}{2 \Delta \eta^2} - t^{n-1} M + 3t^{n+1} u_i^n + 4A_0 \\
A_3 &= \frac{(1+K)}{\Delta \eta^2} + 3A_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan momentum untuk *small time* adalah

$$-(A_1)\Delta u_{i-1}^{n+1} + (A_2)\Delta u_i^{n+1} - (A_3)\Delta u^{n+1} = P_i$$

5.1.2 Diskritisasi Model Persamaan Momentum Angular untuk *small time*

Dengan substitusi $\frac{\partial F}{\partial \eta} = u$, maka persamaan momentum angular untuk *small time* pada titik stagnasi adalah

$$(1 + \frac{K}{2})(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(2f \frac{\partial h}{\partial \eta} - hu) = t \frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (5.10)$$

Dengan menggunakan metode implisit Euler maka diperoleh

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{K}{2}) \frac{1}{\Delta \eta^2} (h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) + \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\Delta \eta} (3h_{i+1}^{n+1} - 4h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) + \frac{h_i^{n+1}}{2} \\ & + \frac{3}{2}t(2f_i^n \frac{1}{2\Delta \eta} (h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) - h_i^{n+1}u_i^n) = t \frac{1}{2\Delta t} (3h_i^{n+1} - 4h_i^n + h_i^{n-1}) \\ & + Kt(2h_i^{n+1} + \frac{1}{2\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Substitusi $h_i^{n+1} = h_i^n + \Delta h_i^n$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} & t \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta h_i^n - \Delta h_i^{n-1}) + Kt(2h_i^n + 2\Delta h_i^n + \frac{1}{2\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n)) \\ & - (1 + \frac{K}{2}) \frac{1}{\Delta \eta^2} (h_{i+1}^n + \Delta h_{i+1}^n - 2h_i^n - 2\Delta h_i^n + h_{i-1}^n + \Delta h_{i-1}^n) \\ & + \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\Delta \eta} (3h_{i+1}^n + 3\Delta h_{i+1}^n - 4h_i^n - 4\Delta h_i^n + h_{i-1}^n + \Delta h_{i-1}^n) + \frac{1}{2} (h_i^n + \Delta h_i^n) \\ & + \frac{3}{2}t(2f_i^n \frac{1}{2\Delta \eta} (h_{i+1}^n + \Delta h_{i+1}^n - 2h_i^n - 2\Delta h_i^n + h_{i-1}^n + \Delta h_{i-1}^n) - h_i^n u_i^n - \Delta h_i^n u_i^n) = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Untuk

$$\begin{aligned} Qi &= \frac{1}{2} \frac{t_i^{n+1}}{\Delta t} \Delta h_i^{n-1} - \frac{1}{\Delta \eta^2} (1 + \frac{K}{2}) (h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\eta_i^n}{\Delta \eta} (3h_{i+1}^n - 4h_i^n + h_{i-1}^n) - \frac{1}{2} h_i^n \\ & - \frac{3}{2} t_i^{n+1} (\frac{1}{\Delta \eta} f_i^n (3h_{i+1}^n - 4h_i^n + h_{i-1}^n) - h_i^n u_i^n) \\ & + Kt_i^{n+1} (2h_i^n + \frac{1}{2\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \frac{t_i^{n+1}}{\Delta t} \Delta h_i^n - \frac{1}{\Delta \eta^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) (\Delta h_{i+1}^n - 2\Delta h_i^n + \Delta h_{i-1}^n) \\
& - \frac{1}{4} \frac{\eta_i^n}{\Delta \eta} (3\Delta h_{i+1}^n - 4\Delta h_i^n + \Delta h_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \Delta h_i^n \\
& - \frac{3}{2} t_i^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta \eta} f_i^n (3\Delta h_{i+1}^n - 4\Delta h_i^n + \Delta h_{i-1}^n) - \Delta h_i^n u_i^n \right) \\
& + K t_i^{n+1} (2\Delta h_i^n + \frac{1}{2\Delta \eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n)) = Qi
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dan untuk

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{4} \frac{\eta_i^n}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} \frac{t_i^{n+1}}{\Delta \eta} f_i^n \\
C_1 &= \frac{1}{\Delta \eta^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) + C_0 \\
C_2 &= \frac{3}{2} \frac{t_i^{n+1}}{\Delta t} + 2K t_i^{n+1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\Delta \eta^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) + \frac{3}{2} t_i^{n+1} + 4C_0 \\
C_3 &= 3C_0 + \frac{1}{\Delta \eta^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right)
\end{aligned}$$

diperoleh persamaan beda pada persamaan momentum angular sebagai berikut

$$-(C_1)\Delta h_{i-1}^{n+1} + (C_2)\Delta h_i^{n+1} - (C_3)\Delta s^{n+1} = Q_i$$

5.1.3 Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk *small time*

Persamaan energi *small time* pada titik stagnasi adalah

$$Pr t \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta}$$

Dengan menggunakan metode implisit Euler maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Pr t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3s_i^{n+1} - 4s_i^n + s_i^{n-1}) &= \frac{1}{\Delta \eta^2} (s_{i+1}^{n+1} - 2s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}) \\
&+ Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} \frac{1}{2} (3s_{i+1}^{n+1} - 4s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}) \\
&+ 3Pr t^{n+1} \frac{f_i^n}{2\Delta \eta} (3s_{i+1}^{n+1} - 4s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1})
\end{aligned}$$

dengan substitusi $s_i^{n+1} = s_i^n + \Delta s_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} Pr \, t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta s_i^n - \Delta s_i^{n-1}) &= \frac{1}{\Delta \eta^2} (s_{i+1}^n + \Delta s_{i+1}^n - 2s_i^n - 2\Delta s_i^n + s_{i-1}^n + \Delta s_{i-1}^n) \\ &+ Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} \frac{1}{2} (3s_{i+1}^n + 3\Delta s_{i+1}^n - 4s_i^n - 4\Delta s_i^n + s_{i-1}^n + \Delta s_{i-1}^n) \\ &+ \frac{3}{2} Pr t^{n+1} \frac{f_i^n}{\Delta \eta} (3s_{i+1}^n + 3\Delta s_{i+1}^n - 4s_i^n - 4\Delta s_i^n + s_{i-1}^n + \Delta s_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Untuk

$$\begin{aligned} Ri &= Pr \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} \Delta s_i^{n-1} + \frac{1}{\Delta \eta^2} (s_{i+1}^n - 2s_i^n + s_{i-1}^n) + \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3s_{i+1}^n - 4s_i^n + s_{i-1}^n) \\ &+ \frac{3}{2} Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_i^n (3s_{i+1}^n - 4s_i^n + s_{i-1}^n) \end{aligned}$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} 3Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta t} \Delta s_i^n - \frac{1}{\Delta \eta^2} (\Delta s_{i+1}^n - 2\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) - \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3\Delta s_{i+1}^n - 4\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) \\ - \frac{3}{2} Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_i^n (3\Delta s_{i+1}^n - 4\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) = Ri \end{aligned}$$

Dan untuk

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} Pr t^{n+1} f_i^n \frac{1}{\Delta \eta} \\ B_1 &= \frac{1}{\Delta \eta^2} + B_0 \\ B_2 &= 3Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta \eta^2} - t^{n+1} M + 3t^{n+1} u_i^n + 4B_0 \\ B_3 &= \frac{1}{\Delta \eta^2} + 3B_0 \end{aligned}$$

diperoleh persamaan beda pada persamaan energi untuk *small time* berikut

$$-(B_1)\Delta s_{i-1}^{n+1} + (B_2)\Delta s_i^{n+1} - (B_3)\Delta s^{n+1} = R_i$$

5.1.4 Diskritisasi Model Persamaan Momentum Untuk *Large Time*

Dengan substitusi $\frac{\partial F}{\partial Y} = U$, maka Persamaan (5.15) menjadi

$$\begin{aligned} (1 + K) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + K \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right) + M(U - 1) + \frac{2}{3} \alpha S + \frac{3}{2} (1 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} - U^2) \\ = \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dengan menggunakan metode implisit Euler maka diperoleh

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{1}{\Delta Y^2} (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) + \frac{K}{2\Delta Y} (3H_{i+1}^n - 4H_i^n + H_{i-1}^n) \\ & + \frac{3}{2} \left(1 - (U_i^{n+1})^2 + 2F_i^n \frac{1}{2\Delta Y} (3U_{i+1}^{n+1} - 4U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) \right) + M (U_i^{n+1} - 1) \\ & + \frac{2}{3} \alpha S_i^n = \frac{1}{2\Delta t} (3U_i^{n+1} - 4U_i^n + U_i^{n-1}) \end{aligned}$$

Dengan substitusi $U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{1}{\Delta Y^2} (U_{i+1}^n + \Delta U_{i+1}^n - 2U_i^n - 2\Delta U_i^n + U_{i-1}^n + \Delta U_{i-1}^n) \\ & + \frac{K}{2\Delta Y} (3H_{i+1}^n - 4H_i^n + H_{i-1}^n) + \frac{3}{2} (1 - (U_i^n + \Delta U_i^n)^2 \\ & + 2F_i^n \frac{1}{2\Delta Y} (3U_{i+1}^n + 3\Delta U_{i+1}^n - 4U_i^n - 4\Delta U_i^n + U_{i-1}^n + \Delta U_{i-1}^n)) \\ & + M (U_i^n + \Delta U_i^n - 1) + \frac{2}{3} \alpha S_i^n = \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta U_i^n - \Delta U_i^{n-1}) \end{aligned}$$

Untuk

$$\begin{aligned} Ki &= \frac{1}{2\Delta t} \Delta U_i^{n-1} + \frac{(1+K)}{\Delta Y^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) + \frac{K}{2\Delta Y} (3H_{i+1}^n - 4H_i^n + H_{i-1}^n) \\ & + \frac{3}{2} t^{n+1} \left(1 - (U_i^n)^2 + \frac{F_i^n}{\Delta Y} (3U_{i+1}^n - 4U_i^n + U_{i-1}^n) \right) + M(U_i^n - 1) + \frac{2}{3} \alpha S \end{aligned}$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \Delta u_i^n - (1+K) \frac{1}{\Delta Y^2} (\Delta U_{i+1}^n - 2\Delta U_i^n + \Delta U_{i-1}^n) + \frac{3}{2} 2U_i^n \Delta U_i^n \\ & - \frac{3}{2} \frac{F_i^n}{\Delta Y} (3\Delta U_{i+1}^n - 4\Delta U_i^n + \Delta U_{i-1}^n) - M \Delta u_i^n = Ki \end{aligned}$$

dan untuk

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{3}{2} F_i^n \frac{1}{\Delta Y} \\ D_1 &= \frac{(1+K)}{\Delta Y^2} + D_0 \\ D_2 &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{(1+K)}{\Delta Y^2} - M + 3U_i^n + 4D_0 \\ D_3 &= \frac{(1+K)}{\Delta Y^2} + 3D_0 \end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan momentum untuk *large time* adalah

$$-(D_1)\Delta U_{i-1}^{n+1} + (D_2)\Delta U_i^{n+1} - (D_3)\Delta U^{n+1} = M_i$$

5.1.5 Diskritisasi Model Persamaan Momentum Angular Untuk *Large Time*

Dengan substitusi $\frac{\partial F}{\partial Y} = U$, persamaan momentum angular pada titik stagnasi untuk *large time* adalah

$$(1 + \frac{K}{2})(\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}) + \frac{3}{2}(2F\frac{\partial H}{\partial Y} - H\frac{\partial F}{\partial Y}) - K(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}) = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.16)$$

Dengan menggunakan metode implisit Euler, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta T}(3H_i^{n+1} - 4H_i^n + H_i^{n-1}) &= (1 + \frac{K}{2})\frac{1}{\Delta Y^2}(H_{i+1}^{n+1} - 2H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}) \\ &+ \frac{3}{2}(\frac{2F_i^n}{2\Delta Y}(3H_{i+1}^{n+1} - 4H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}) - H_i^{n+1}U_i^n) \\ &- K(2H_i^{n+1} + \frac{1}{2\Delta Y}(3U_{i+1}^n - 4U_i^n + U_{i-1}^n)) \end{aligned}$$

Dengan substitusi $H_i^{n+1} = H_i^n + \Delta H_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta T}(3\Delta H_i^n - \Delta H_i^{n-1}) &= (1 + \frac{K}{2})\frac{1}{\Delta Y^2}(H_{i+1}^n + \Delta H_{i+1}^n - 2H_i^n - 2\Delta H_i^n \\ &+ H_{i-1}^n + \Delta H_{i-1}^n) + \frac{3}{2}(\frac{2F_i^n}{2\Delta Y}(3H_{i+1}^n + 3\Delta H_{i+1}^n - 4H_i^n - 4\Delta H_i^n + H_{i-1}^n + \Delta H_{i-1}^n) \\ &- H_i^n U_i^n - \Delta H_i^n U_i^n) - K(2H_i^n + 2\Delta H_i^n + \frac{1}{2\Delta Y}(3U_{i+1}^n - 4U_i^n + U_{i-1}^n)) \end{aligned}$$

Untuk

$$\begin{aligned} Li &= \frac{1}{2\Delta T}\Delta H_i^{n-1} + (1 + \frac{K}{2})\frac{1}{\Delta Y^2}(H_{i+1}^n - 2H_i^n + H_{i-1}^n) \\ &+ \frac{3}{2}(\frac{2F_i^n}{2\Delta Y}(3H_{i+1}^n - 4H_i^n + H_{i-1}^n) - H_i^n U_i^n) \\ &- K(2H_i^n + \frac{1}{2\Delta Y}(3U_{i+1}^n - 4U_i^n + U_{i-1}^n)) \end{aligned}$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Delta T}\Delta H_i^n - (1 + \frac{K}{2})\frac{1}{\Delta Y^2}(\Delta H_{i+1}^n - 2\Delta H_i^n + \Delta H_{i-1}^n) \\ - \frac{3}{2}(\frac{2F_i^n}{2\Delta Y}(3\Delta H_{i+1}^n - 4\Delta H_i^n + \Delta H_{i-1}^n) - \Delta H_i^n U_i^n) - K(2\Delta H_i^n) = Li \end{aligned}$$

Dan untuk

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{3}{2} F_i^n \frac{1}{\Delta Y} \\
E_1 &= \frac{1}{\Delta Y^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) + E_0 \\
E_2 &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta t} + 2K + \frac{2}{\Delta Y^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) + \frac{3}{2} U_i^n + 4E_0 \\
E_3 &= \frac{1}{\Delta Y^2} \left(1 + \frac{K}{2}\right) + 3E_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan momentum angular *large time* adalah

$$-(E_1)\Delta H_{i-1}^{n+1} + (E_2)\Delta H_i^{n+1} - (E_3)\Delta H^{n+1} = L_i$$

5.1.6 Diskritisasi Model Persamaan Energi Untuk *Large Time*

Persamaan energi pada titik stagnasi untuk *large time* adalah

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} - 3PrF \frac{\partial S}{\partial Y} \quad (5.17)$$

Dengan menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Pr \frac{1}{2\Delta t} (3S_i^{n+1} - 4S_i^n + S_i^{n-1}) &= \frac{1}{\Delta Y^2} (S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}) \\
&+ 3PrF_i^n (3S_{i+1}^{n+1} - 4S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1})
\end{aligned}$$

Dengan substitusi $S_i^{n+1} = S_i^n + \Delta S_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Pr \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta S_i^n - \Delta S_i^{n-1}) &= \frac{1}{\Delta Y^2} (S_{i+1}^n + \Delta S_{i+1}^n - 2S_i^n - 2\Delta S_i^n + S_{i-1}^n + \Delta S_{i-1}^n) \\
&+ 3PrF_i^n (3S_{i+1}^n + 3\Delta S_{i+1}^n - 4S_i^n - 4\Delta S_i^n + S_{i-1}^n + \Delta S_{i-1}^n)
\end{aligned}$$

Untuk

$$Ni = \frac{Pr}{2\Delta T} \Delta S_i^{n-1} + \frac{1}{\Delta Y^2} (S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n) + \frac{3}{2} Pr \frac{1}{\Delta Y} F_i^n (3S_{i+1}^n - 4S_i^n + S_{i-1}^n)$$

diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
Ni &= \frac{3}{2\Delta T} Pr \Delta S_i^n - \frac{1}{\Delta Y^2} (\Delta S_{i+1}^n - 2\Delta S_i^n + \Delta S_{i-1}^n) \\
&- 3Pr \frac{1}{\Delta Y} F_i^n (3\Delta S_{i+1}^n - 4\Delta S_i^n + \Delta S_{i-1}^n)
\end{aligned}$$

Dan untuk

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{3}{2}PrF_i^n \frac{1}{\Delta Y} \\
F_1 &= \frac{1}{\Delta Y^2} + F_0 \\
F_2 &= \frac{2}{\Delta Y^2} + 4F_0 \\
F_3 &= \frac{1}{\Delta Y^2} + 3F_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan energi untuk *large time* adalah

$$-(F_1)\Delta S_{i-1}^{n+1} + (F_2)\Delta S_i^{n+1} - (F_3)\Delta S^{n+1} = L_i$$

5.2 Algoritma Thomas

Persamaan beda pada persamaan pembangun yang telah diperoleh dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linier. Sistem persamaan tersebut selanjutnya akan diselesaikan menggunakan Algoritma Thomas. Persamaan beda untuk persamaan momentum diberikan sebagai berikut

$$-(A_1)\Delta u_{i-1}^{n+1} + (A_2)\Delta u_i^{n+1} - (A_3)\Delta u_{i+1}^{n+1} = P_i$$

Persamaan tersebut memiliki partisi sebanyak $n\eta$ titik yang tidak diketahui dan untuk $\eta = 0$ merupakan titik yang nilai kecepatannya diketahui. Misalkan jumlah titik tersebut adalah $m = n\eta$, maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
(A_2)_1\Delta u_1^{n+1} - (A_3)_1\Delta u_2^{n+1} &= K_1 \\
-(A_1)_2\Delta u_1^{n+1} + (A_2)_2\Delta u_2^{n+1} - (A_3)_2\Delta u_3^{n+1} &= K_2 \\
\vdots &\quad \quad \quad \vdots \\
-(A_1)_{m-1}\Delta u_{m-2}^{n+1} + (A_2)_{m-1}\Delta u_{m-1}^{n+1} - (A_3)_{m-1}\Delta u_m^{n+1} &= K_{m-1} \\
-(A_1)_m\Delta u_{m-1}^{n+1} + (A_2)_m\Delta u_m^{n+1} &= K_m
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan linier yang diperoleh diselesaikan dengan Algoritma Thomas sebagai berikut:

Langkah 1

Misalkan

$$A_1 = a \qquad A_2 = b \qquad A_3 = c$$

Langkah 2

Untuk $i=1$

$$b'_i = b_i$$

$$K'_i = K_i$$

Langkah 3

Untuk $i=2,3,\dots,m$

$$b'_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{b_{i-1}}$$

$$K'_i = K_i - \frac{a_i K_{i-1}}{b_{i-1}}$$

Langkah 4

Untuk $i=m,\dots,1$

$$\Delta u_i = \frac{b'_{i-1} K_i + a_i K'_{i-1}}{b'_{i-1} b_i - a_i c'_{i-1}}$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh solusi untuk persamaan beda pada persamaan momentum angular untuk *small time* dan *large time*, persamaan beda pada persamaan energi untuk *small time* dan *large time*. Sehingga diperoleh solusi untuk h_i^{n+1} , s_i^{n+1} , U_i^{n+1} , H^{n+1} , dan S_i^{n+1} .

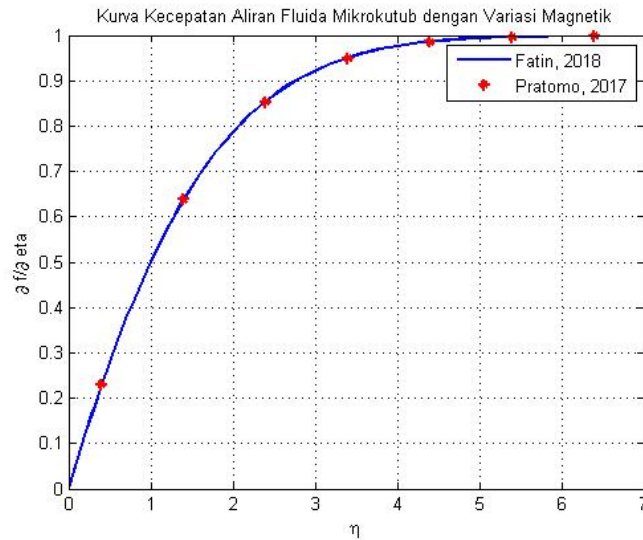
5.3 Validasi Model

Validasi merupakan usaha dalam menyimpulkan apakah model yang telah diperoleh mewakili realitas yang dikaji sehingga menghasilkan kesimpulan yang meyakinkan. Sedangkan validasi adalah perbandingan hasil perhitungan secara numerik yang diperoleh dengan hasil penelitian sebelumnya yang telah mendapatkan pengakuan secara akademik, misalnya telah dipublikasikan dalam jurnal atau telah diseminasikan dalam *international conference*

Pada penelitian ini, model yang telah diperoleh pada bab 4 akan divalidasi dengan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh (Pratomo, 2017) dengan judul "Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokutub Di Bawah Pengaruh Konveksi Campuran". Validasi dilakukan pada grafik kecepatan dan kecepatan mikrorotasi.

Pada validasi kecepatan dan kecepatan mikrorotasi digunakan parameter $M = 0$, yaitu pada kondisi benda tidak bermagnet. Parameter konveksi

campuran $\alpha = 0$, hal ini dikarenakan pada penelitian yang dilakukan oleh (Pratomo, 2017) tersebut tidak terdapat adanya pengaruh konveksi campuran. Sedangkan nilai parameter yang lain adalah $(Pr = 1), (K = 1), (N = 0.5)$, partisi η sebanyak 70, $\Delta\eta = 0.001$ dan $\Delta t = 0.1$. Hasil perbandingan pada validasi disajikan pada gambar dan tabel berikut.



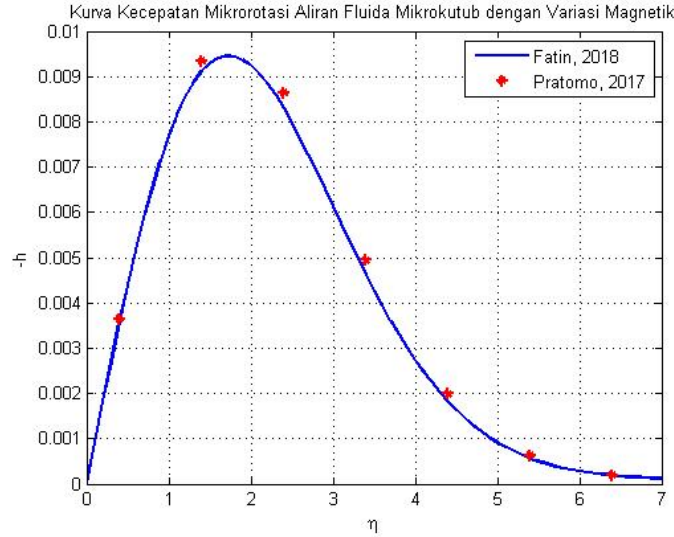
Gambar 5.1: Profil Kecepatan Pada Validasi

Tabel 5.1: Validasi Hasil Simulasi

η	Kecepatan (Pratomo, 2017)	Kecepatan (Fatin, 2018)	Mikrorotasi (Pratomo, 2017)	Mikrorotasi (Fatin, 2018)
0.5	0.22976059550	0.23061165103	0.00364767999	0.00357417174
1.5	0.63758905701	0.64034539695	0.00935022803	0.00911125857
2.5	0.85331664482	0.85639239066	0.00863877117	0.00829119706
3.5	0.94960636926	0.9517107645	0.00494632142	0.00462980717
4.5	0.98551889154	0.98652197354	0.00199575314	0.00181116076
5.5	0.99661326803	0.99695757820	0.00063227815	0.00056286249
6.5	0.99944817048	0.99952065556	0.00020265656	0.00018853465

Pada Gambar 5.1, dengan mengambil beberapa titik pada model yang sudah valid, grafik kecepatan yang di validasi mempunyai nilai kecepatan yang hampir sama dengan nilai kecepatan pada model yang sudah valid. Sedangkan pada Gambar 5.2 menunjukkan validasi kecepatan mikrorotasi. Hasilnya, nilai kecepatan mikrorotasi dari model yang divalidasi mempunyai

nilai yang hampir sama dengan model yang sudah valid (dengan mengambil beberapa sampel titik).



Gambar 5.2: Profil Mikrorotasi Pada Validasi

Berdasarkan hasil validasi model di atas, maka model matematika dan penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga skema implisit Euler dari magnetohidrodinamik fluida mikrokatub tak tunak yang melewati bola dipengaruhi oleh medan magnet dan konveksi campuran dapat digunakan untuk mensimulasi parameter-parameter yang digunakan pada penelitian ini, yaitu konveksi campuran (α), bilangan Prandtl (Pr), bahan mikrokatub (K), dan magnetik (M).

5.4 Simulasi dan Analisis Hasil

Setelah dilakukan penyelesaian secara numerik, selanjutnya pada sub bab ini akan dilakukan simulasi menggunakan software MATLAB. Simulasi dilakukan dengan $\Delta\eta = 0.1$, partisi η sebanyak 60 dan memvariasikan parameter-parameter non-dimensional yaitu parameter magnetik (M), parameter konveksi campuran (α), bilangan Prandtl (Pr), parameter bahan (K) dan konsentrasi mikrokatub (N). Berikut adalah uraian hasil analisis simulasi dari masing-masing variasi parameter.

5.4.1 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M)

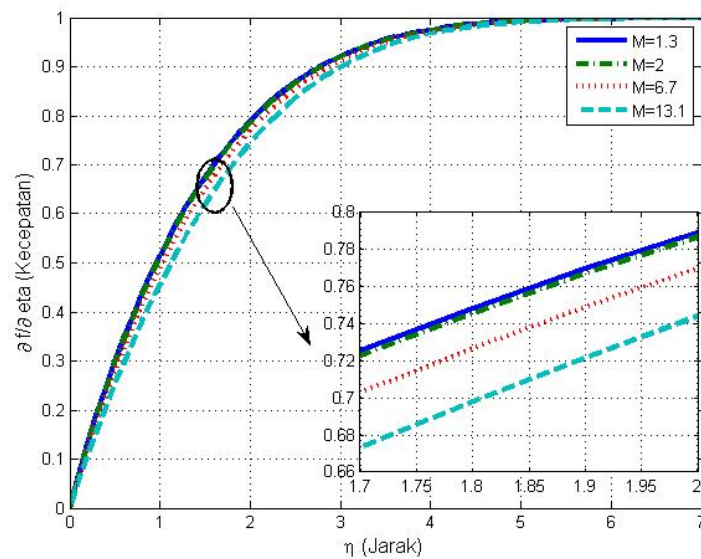
Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik (M) terhadap kecepatan aliran fluida mikrokatub yang mengalir melalui bola

pejal bermagnet yang dipengaruhi konveksi campuran. Pemilihan besarnya parameter magnetik didasarkan pada jenis bahan dari bola bermagnet. Dengan menggunakan rumus $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho u_\infty}$ dan $B_0 = 10^{-1}$, $a = 10^{-1}$, $u_\infty = 1$, diperoleh bahwa parameter magnetik (M) dari bola bermagnet dengan bahan besi, baja, tembaga, dan seng diberikan oleh Tabel 5.2.

Tabel 5.2: Nilai Parameter Magnetik

N0	Benda	kerapatan (ρ) (kg/m^3)	Konduktivitas Listrik (σ)	Parameter Magnetik (M)
1.	Besi	$7,87 \times 10^3$	$1,04 \times 10^7$	1,3
2.	Baja	$7,75 \times 10^3$	$1,61 \times 10^7$	2
3.	Tembaga	$8,94 \times 10^3$	$5,96 \times 10^7$	6,7
4.	Aluminium	2.7×10^3	3.56×10^7	13,1

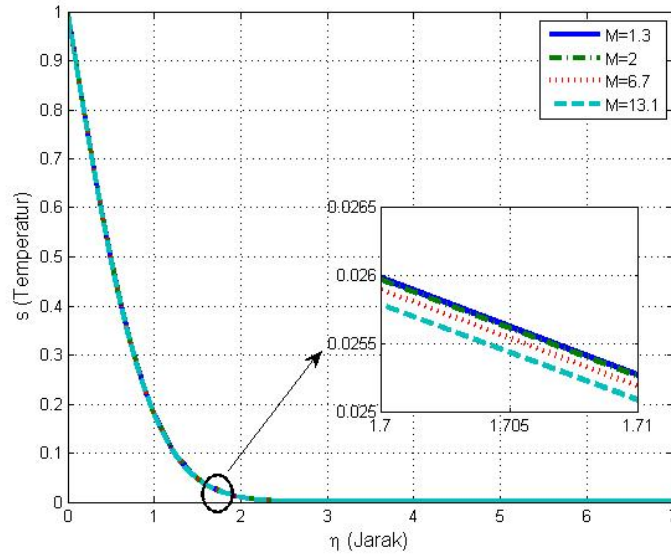
Hasil variasi parameter magnetik terhadap kecepatan ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 5.3: Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan

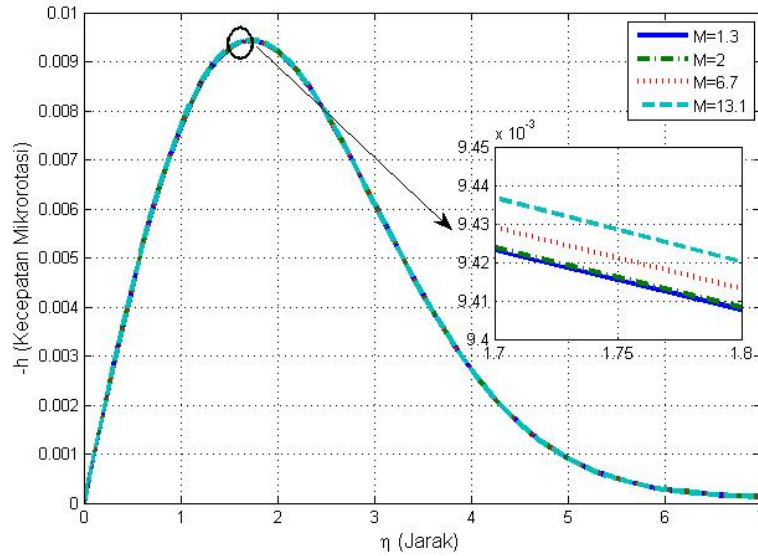
Parameter yang digunakan adalah bilangan prandtl ($Pr = 4,41$), parameter konveksi campuran ($\alpha = 18,6$), parameter bahan mikrokotub ($K = 1$), dan konsentrasi fluida mikrokotub ($N = 0.5$). Untuk partisi

waktu sebanyak ($t = 33$), partisi η sebanyak 70, dengan $\Delta\eta = 0.001$ dan $\Delta t = 0.1$ Gambar 5.3 menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida dengan variasi parameter magnetik bergerak dari nol dan konvergen ke satu pada saat $\eta = 5$. Kecepatan maksimum adalah satu, mengikuti kecepatan pada aliran bebas U_∞ . Pada saat $0 < \eta < 5$, parameter magnetik yang lebih besar bergerak lebih lambat untuk mencapai kecepatan maksimum. Hal ini terjadi karena adanya gaya Lorentz. Gaya Lorentz dari bola bermagnet menghambat aliran fluida yang melalui bola bermagnet. Karena gaya Lorentz berbanding lurus dengan besarnya medan magnet, sehingga semakin besar parameter magnetik dari bola, semakin lambat mencapai kecepatan maksimum. Untuk pengaruh parameter magnetik terhadap temperatur fluida di sekitar titik stagnasi dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 5.4: Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Temperatur

Dari Gambar 5.4 menunjukkan bahwa dengan $(Pr = 4,41)$, $(\alpha = 18,6)$, $(K = 1)$, $(n = 0.5)$, partisi η sebanyak 70, $\Delta\eta = 0.001$ dan $\Delta t = 0.1$, temperatur konvergen ke nol pada saat $\eta > 3$. Selain itu, semakin besar parameter magnetik bola, temperatur fluida semakin turun. Medan magnet yang dihasilkan oleh bola bermagnet akan membuat energi internal fluida semakin meningkat, sehingga menyebabkan temperatur fluida akan semakin turun. Selanjutnya pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan mikrorotasi dapat dilihat pada Gambar 5.5 berikut ini.



Gambar 5.5: Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Mikrorotasi

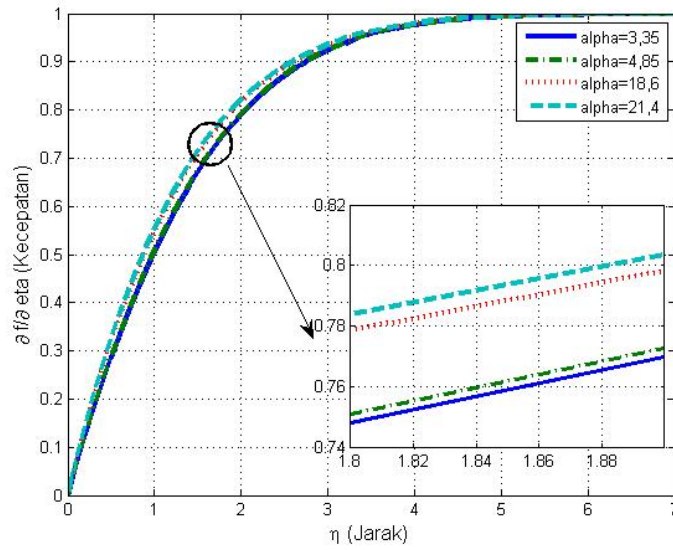
Gambar 5.5 menunjukkan bahwa pada saat bola pertama kali bersentuhan dengan fluida, kecepatannya adalah nol yang berarti rasio antara gesekan fluida dipermukaan dengan komponen vektor mikrorotasi bernilai nol. Pada saat $0 < \eta < 6$, fluida yang mengalir pada bola dengan parameter magnetik lebih besar memiliki kemampuan mikrorotasi yang lebih cepat dibandingkan dengan fluida yang mengalir melalui benda dengan parameter magnetik lebih rendah. Hal ini disebabkan oleh adanya gaya Lorentz yang berasal dari benda menyebabkan kecepatan fluida menurun sehingga berakibat pada kenaikan kecepatan mikrorotasi fluida mikroktub. Tanda negatif dari kecepatan mikrorotasi menunjukkan arah dari mikrorotasi partikel dari fluida yang berlawanan dengan arah jarum jam.

5.4.2 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran

Parameter konveksi campuran dapat diperoleh dengan membagi bilangan Grasof dengan kuadrat bilangan Reynold. Bilangan Grasof merupakan perbandingan gaya apung terhadap gaya viskos fluida. Gaya apung menimbulkan penurunan kerapatan fluida saat terjadi kenaikan suhu fluida. Selain dipengaruhi gaya grafitasi dan suhu fluida, bilangan Grasof juga dipengaruhi koefisien muai panas fluida. Dengan memasukkan koefisien muai panas (β) fluida (toluena = $10,8 \times 10^{-4}$, ethanol = $10,9 \times 10^{-4}$,

chloromethane = $10,2 \times 10^{-4}$, methanol = $14,9 \times 10^{-4}$) diperoleh parameter konveksi campuran fluida tersebut berturut-turut $\alpha = 3,53, \alpha = 4,85, \alpha = 18,6, \alpha = 21,4$).

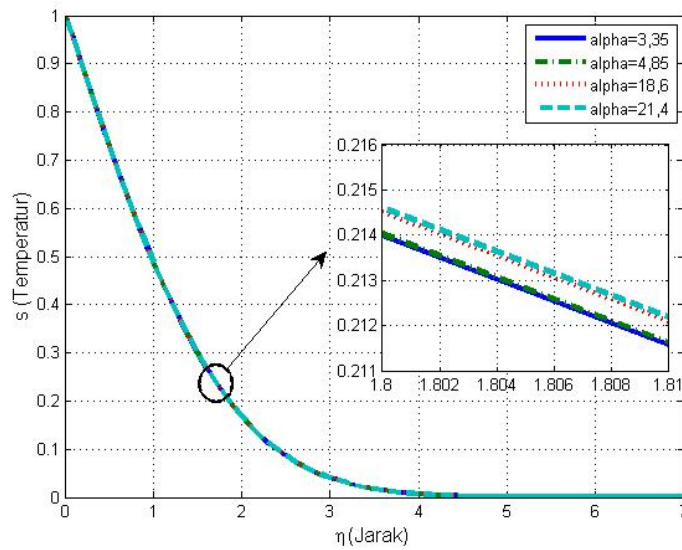
Parameter yang digunakan untuk variasi parameter konveksi campuran adalah ($M = 1.3$), ($Pr = 1$), ($K = 1$), ($N = 0.5$), partisi η sebanyak 70, $\Delta\eta = 0.001$ dan $\Delta t = 0.1$. Berikut adalah grafik pengaruh konveksi campuran terhadap kecepatan aliran fluida mikrokutub.



Gambar 5.6: Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Kecepatan

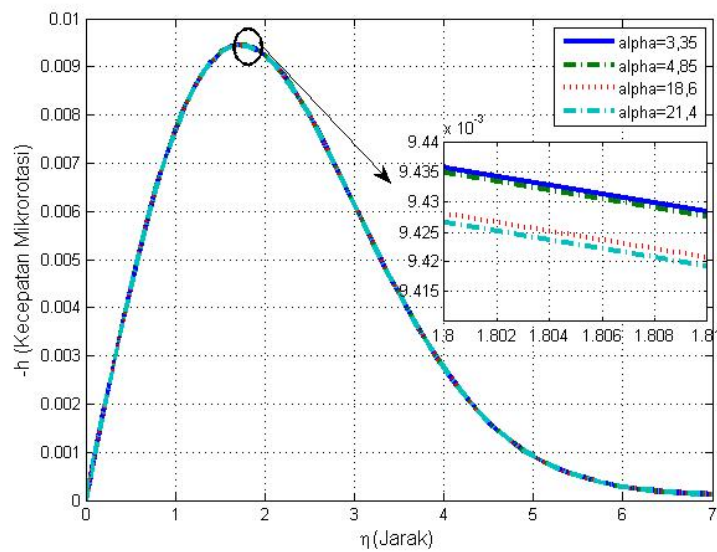
Pada Gambar 5.6 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari nol sampai mendekati satu. Jika diamati dengan variasi parameter konveksi campuran, profil kecepatan fluida mikrokutub semakin meningkat ketika parameter konveksi campuran ditingkatkan. Koefisien konveksi berbanding terbalik dengan perbedaan suhu sementara permukaan (T_w) dengan suhu fluida (T_∞), dengan ($\Delta T = T_w - T_\infty$). Dengan kata lain koefisien konveksi campuran berbanding lurus dengan suhu fluida, sehingga semakin besar nilai konveksi campuran semakin besar pula suhu fluida. Adanya peningkatan suhu fluida menyebabkan fluida lebih ringan dan bergerak lebih cepat. Meningkatnya konveksi campuran Pengaruh variasi konveksi campuran terhadap temperatur dapat dilihat pada gambar berikut.

Gambar 5.7 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida mikrokutub mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Pengamatan terhadap variasi



Gambar 5.7: Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Temperatur

parameter konveksi campuran menunjukkan bahwa profil temperatur fluida mikrotub mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya parameter konveksi campuran. Hal ini terjadi karena koefisien konveksi campuran berbanding lurus dengan suhu fluida, sehingga semakin besar nilai konveksi campuran semakin besar pula suhu fluida.



Gambar 5.8: Variasi Parameter Konveksi Campuran Terhadap Profil Mikrorotasi

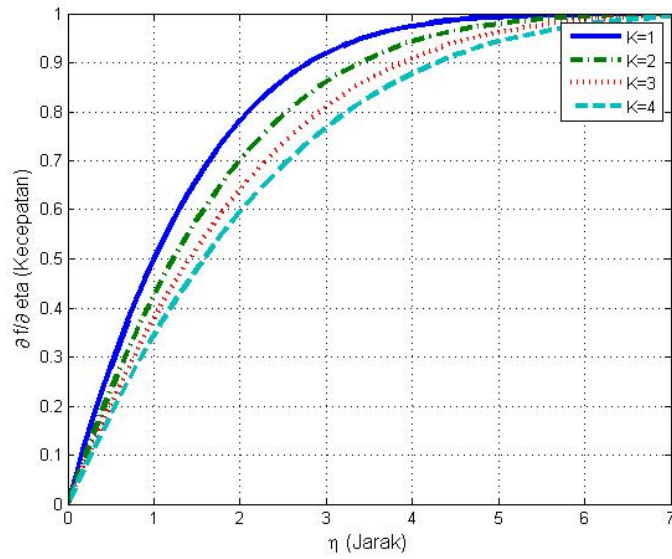
Gambar 5.8 menunjukkan pengaruh konveksi campuran terhadap kecepatan mikrorotasi. Kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub bergerak dari nol, meningkat dan kemudian turun menuju ke nol kembali pada saat nilai η semakin besar, atau saat fluida jauh dari bola. Selain itu, pada variasi konveksi campuran, semakin besar nilai konveksi campuran, semakin turun kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena adanya peningkatan koefisien konveksi menyebabkan pada naiknya kecepatan fluida, sehingga mikrorotasi antar partikel fluida semakin menurun.

5.4.3 Pengaruh Variasi Parameter Bahan Mikrokutub

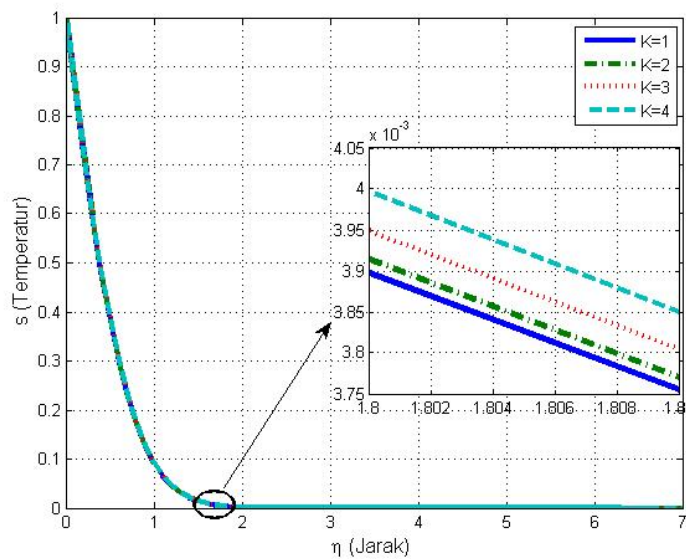
Parameter bahan mikrokutub (K) ditentukan oleh konstanta material (k) dan μ . Konstanta material k menunjukkan viskositas rotasi dari partikel fluida mikrokutub. Fluida dengan $K = 0$ menunjukkan bahwa fluida tersebut adalah fluida Newtonian. Pada penelitian ini digunakan nilai parameter bahan $K = 1, K = 2, K = 3, K = 4$ (Mohammad, 2012), (Ningtyas, 2016), (Pratomo, 2017).

Profil kecepatan dengan variasi parameter bahan yaitu $K = 1, K = 2, K = 3, K = 4$ dengan besar parameter magnetik $M = 1, 3$, bilangan Prandtl $Pr = 4, 41$, konsentrasi fluida $N = 0, 5$, dan parameter konveksi campuran $\alpha = 18, 6$. Gambar 5.9 menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter bahan yang diberikan, maka akan semakin kecil kecepatan dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena semakin besarnya gesekan yang terjadi antar partikel fluida mikrokutub saat mengalir, sehingga terjadi penurunan kecepatan aliran fluida. Selain itu dengan semakin besarnya parameter bahan yang diberikan, maka mengakibatkan semakin besar pula momentumnya, sehingga gradien kecepatan yang dihasilkan akan semakin kecil.

Gambar 5.10 menunjukkan pengaruh parameter bahan terhadap temperatur. Pada saat fluida mulai bersentuhan dengan bola atau $\eta = 0$, temperatur fluida sama dengan satu dan berangsur turun menuju ke nol, dengan kata lain temperatur fluida sama dengan temperatur T_∞ . Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa semakin besar nilai parameter bahan mikrokutub, semakin besar temperatur. Hal ini terjadi karena semakin besar parameter bahan, semakin besar pula gesekan yang terjadi antara partikel fluida mikrokutub. Besarnya gesekan yang terjadi antar partikel fluida mikrokutub saat mengalir, mengakibatkan temperatur lebih tinggi atau lebih lambat turun.

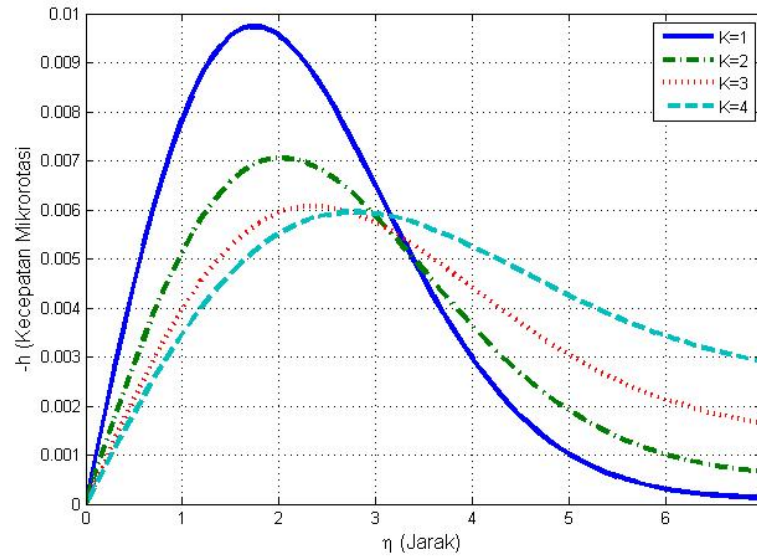


Gambar 5.9: Variasi Parameter Bahan Mikrokutub Terhadap Kecepatan



Gambar 5.10: Variasi Parameter Bahan Mikrokutub Terhadap Temperatur

Selanjutnya pengaruh parameter bahan terhadap kecepatan mikrorotasi ditunjukkan oleh Gambar 5.11. Pada gambar tersebut, pada saat $0 < \eta < 3$, semakin besar parameter bahan semakin kecil mikrorotasi. Hal ini menunjukkan bahwa di dekat bola, fluida dengan parameter bahan lebih kecil lebih cepat mikrorotasinya. Semakin menjauh dari bola, fluida dengan parameter bahan lebih besar memiliki mikrorotasi lebih besar.



Gambar 5.11: Variasi Parameter Bahan Mikrocutub Terhadap Profil Mikrorotasi

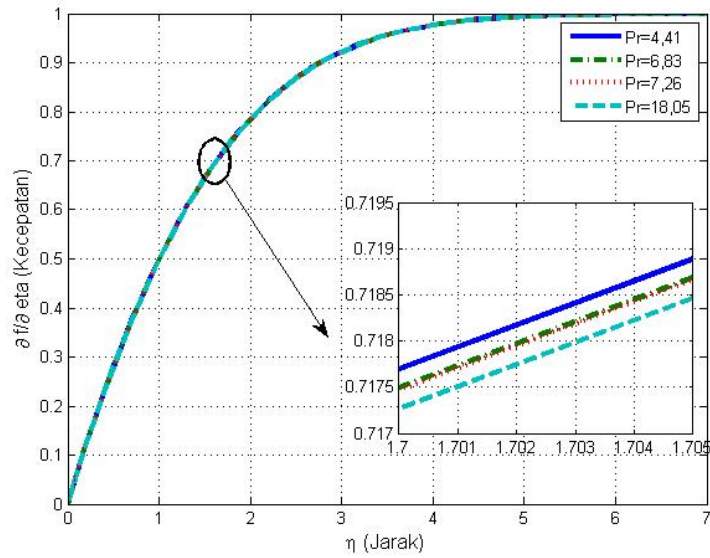
5.4.4 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl

Bilangan Prandtl merupakan perbandingan antara viskositas kinematik dan difusifitas termal. Bilangan Prandtl $0 < Pr < 1$ menunjukkan bahwa viskositas kinematik fluida lebih kecil dari pada difusifitas termalnya. Dalam hal ini, fluida memiliki kecepatan penerusan panas lebih tinggi dari pada perpindahan molekul fluida. Sebaliknya, bilangan Prandtl $Pr > 1$ menunjukkan viskositas kinematik fluida lebih besar dari pada difusifitas termalnya. Dengan kata lain, fluida dengan bilangan Prandtl lebih dari 1 memiliki kemampuan penyebaran panas lebih rendah dari pada fluida dengan bilangan Prandtl kurang dari satu.

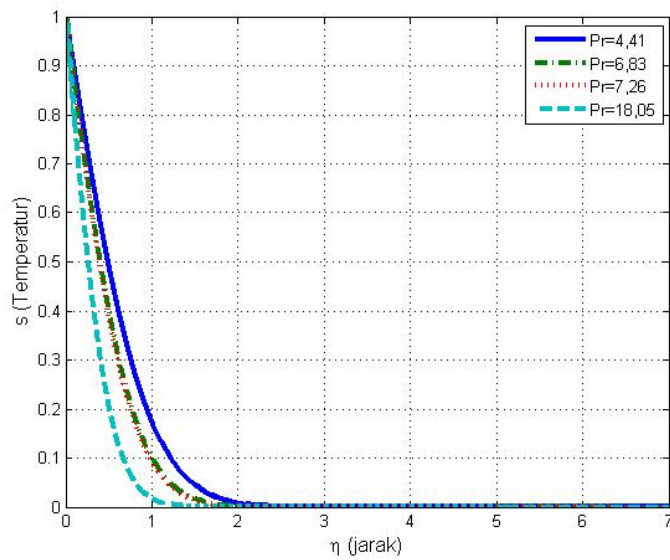
Cairan polimer termasuk dalam kategori fluida mikrocutub (Eringen, 1965). Pada penelitian ini diambil beberapa cairan polimer untuk pengambilan variasi bilangan Prandtl. Diantaranya adalah chloromethane ($Pr = 4,41$), methanol ($Pr = 6,83$), toluena ($Pr = 7,26$), Ethanol ($Pr = 18,05$).

Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh bilangan Prandtl pada kecepatan, temperatur, dan kecepatan mikrorotasi ditunjukkan pada Gambar 5.12, Gambar 5.13 dan Gambar 5.14. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, parameter konveksi campuran, konsentrasi mikrocutub dan parameter bahan mikrocutub yaitu masing-masing sebesar $M = 1.3$, $\alpha = 1$, $N = 0.5$ dan $K = 1$. Sedangkan

parameter bilangan prandtl divariasi yaitu $Pr = 4,41; 6,83; 7,26$, dan $18,05$.



Gambar 5.12: Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Kecepatan



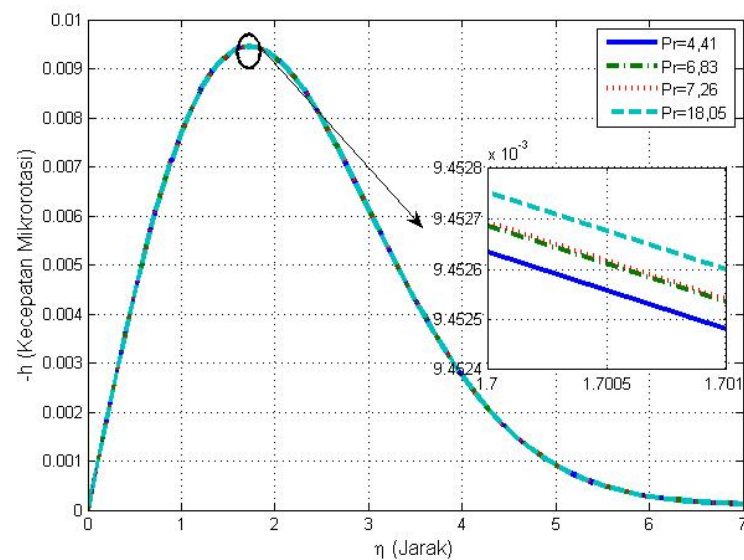
Gambar 5.13: Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Temperatur

Pada Gambar 5.12 menunjukkan bahwa pada saat $0 < \eta < 5$, kecepatan fluida mikrotub naik dari nol menuju satu. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, profil kecepatan semakin menurun ketika bilangan Prandtl diperbesar. Hal ini terjadi karena semakin besar bilangan Prandtl, semakin

turun difusivitas termalnya. Difusivitas fluida berbanding terbalik dengan kerapatan fluida. Sehingga semakin besar bilangan Prandtl menyebabkan semakin turunnya difusivitas termal dan semakin naiknya kerapatan partikel fluida. Adanya kenaikan kerapatan tersebut membuat kecepatan fluida semakin berkurang.

Gambar 5.13 menunjukkan pengaruh variasi bilangan Prandtl terhadap temperatur fluida mikrokutub. Berdasarkan gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa semakin besar bilangan Prandtl maka menyebabkan profil temperatur semakin kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar bilangan Prandtl, difusivitas termal semakin menurun.

Pengaruh bilangan Prandtl terhadap kecepatan mikrorotasi dapat dilihat



Gambar 5.14: Variasi Bilangan Prandtl Terhadap Profil Mikrorotasi

pada Gambar 5.14. Kecepatan mikrorotasi semakin turun untuk bilangan Prandtl yang semakin meningkat. Hal ini terjadi karena kecepatan fluida yang semakin besar, sehingga kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub semakin berkurang.

Dari variasi beberapa parameter di atas, dapat diketahui bahwa gerakan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub berhubungan dengan temperatur dan kecepatan fluida. Gerakan mikrorotasi partikel fluida menyebabkan timbulnya gaya gesek antar partikel. Hal ini mengakibatkan kenaikan temperatur. Oleh sebab itu, pada saat kecepatan mikrorotasi maksimum, temperatur fluida

mengalami kenaikan yang signifikan.

Selain mempengaruhi temperatur fluida, gerakan mikrorotasi antar partikel fluida juga mempengaruhi kecepatan aliran fluida. Gerakan mikrorotasi partikel fluida menghambat kecepatan aliran fluida. Sehingga pada saat gerakan mikrorotasi partikel fluida cukup cepat, aliran fluida lebih lambat. Partikel fluida mikrokutub masih melakukan gerakan pada lapisan batas. Hal ini ditunjukkan pada grafik kecepatan mikrorotasi masih terdapat adanya kecepatan untuk η mendekati nol.

BAB 6

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

i Model matematika pada penelitian ini dibangun dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan momentum angular, dan persamaan energi. Persamaan yang terbentuk ditransformasikan ke persamaan non dimensional. Selanjutnya persamaan diubah ke persamaan similaritas, sehingga diperoleh model untuk *small time* sebagai berikut:

a. Persamaan momentum

$$(1+K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' + Mt(1-f') + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t(1+ff'' - (f')^2) = t\left(\frac{\partial f'}{\partial t}\right)$$

b. Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t\frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + f'')$$

c. Persamaan energi

$$s'' + Pr\frac{\eta}{2}s' + \frac{3}{2}Prtfs' = Prt\frac{\partial s}{\partial t}$$

Dengan kondisi batas:

$t = 0 : f = f' = h = s = 0$ untuk setiap x, η

$t > 0 : f = f' = 0, h = -nf'', s = 1$, pada $\eta = 0$

$f' = 1, h = s = 0$ pada $\eta \longrightarrow \infty$

Model untuk *large time*

a. Persamaan momentum

$$(1+K)F''' + KH' + M(1-F') + \frac{2}{3}\alpha S + \frac{3}{2}(1+FF'' - (F')^2) = \left(\frac{\partial F'}{\partial t}\right)$$

b. Persamaan momentum angular

$$(1 + \frac{K}{2})H'' + \frac{3}{2}(FH' - HF') = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + F'')$$

c. Persamaan energi

$$S'' + \frac{3}{2}PrFS' = Pr\frac{\partial S}{\partial t}$$

dengan kondisi batas:

$$F = F' = 0, H = -nF'', S = 1, B_0 > 0 \text{ pada } Y = 0$$

$$F' = 1, H = S = B_0 = 0 \text{ pada } Y \longrightarrow \infty$$

ii Model matematika aliran magnetohidrodinamika fluida mikrokutub melewati bola dipengaruhi oleh konveksi campuran yang telah diperoleh diselesaikan menggunakan metode beda hingga skema implisit Euler. Hasil simulasi dengan variasi beberapa parameter yaitu parameter magnetik (M), parameter konveksi campuran (α), parameter bahan mikrokutub (K), dan bilangan Prandtl (Pr) terhadap kecepatan, temperatur, dan mikrorotasi dapat disimpulkan sebagai berikut:

- a Semakin besar parameter magnetik (M) diperoleh bahwa semakin meningkat pula kecepatan mikrorotasi, sedangkan kecepatan dan temperatur semakin turun karena pengaruh dari gaya Lorentz.
- b Semakin meningkat parameter konveksi campuran (α), kecepatan dan temperatur fluida mengalami peningkatan sedangkan kecepatan mikrorotasi fluida mikrokutub semakin turun. Hal ini dikarenakan kenaikan konveksi campuran seiring dengan kenaikan suhu fluida.
- c Semakin meningkat parameter bahan mikrokutub (K) mengakibatkan menurunnya kecepatan dan temperatur semakin naik. Semakin besar parameter bahan mikrokutub maka kecepatan mikrorotasi semakin turun sampai titik tertentu kemudian berbalik menjadi semakin naik. Hal ini disebabkan meningkatnya gesekan antar partikel fluida.
- d kecepatan mikrorotasi semakin meningkat seiring dengan bertambahnya bilangan Prandtl (Pr). Sebaliknya, semakin besar bilangan Prandtl temperatur dan kecepatan semakin turun karena pengaruh dari difusivitas termal.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan pada permasalahan ini, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah :

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi pada titik stagnasi dengan fluida dan benda yang bermuatan magnet.
2. Pada penelitian selanjutnya dapat pula dilakukan studi tidak pada titik stagnasi dengan bola yang bermuatan magnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola.

PERNYATAAN RESMI

Penelitian ini didukung oleh Lembaga Penelitian dan Pengembangan Masyarakat (LPPM) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, Jawa Timur, Indonesia dengan nomor surat persetujuan pendanaan 970/PKS/ITS/2018. Kami mengucapkan terima kasih kepada LPPM-ITS yang telah memberikan kesempatan untuk menyajikan penelitian ini pada tesis.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Rahman, G. M., (2011), "Effect of Magnetohydrodynamic on Thin Films of Unsteady Micropolar Fluid through a Porous Medium", *Journal of Modern Physics*, Vol. 2, hal. 1290-1304
- Anderson, John,D.J., (1995), *Computational Fluid Dynamics The Basic With Application*, McGraw-Hill, inc., New York.
- Anggriani, I., Widodo, B., Imron, C., (2016), "The Unsteady Flow Magnetohydrodynamic In Micropolar Fluid Through Porous Sphere", *Proceeding of The 6th Annual Basic Science International Conference*
- A.R.M. Kasim, (2014), Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid, Faculty of Science Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Battista, Nicholas. A., (2010), *An Introduction of Magnetohydrodynamics*, Lecture handout, Stony Brook University, USA.
- Eringen, A.C., (1965), *Theory of Micropolar Fluids*, Report, Purdue University, Indiana.
- Ghani, M., Widodo, B. and Imron, C. (2015), "Incompressible And Steady Mixed Convection Flow Past Over A Sphere", *The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection*, Malang, Indonesia.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012), "Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past a Sphere in a Micropolar Fluid", *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 1450. 211-217.
- Lienhard IV, J.H., Lienhard V, J.H.,(2008), *A Heat Transfer Textbook*, Third Edition, Phlogiston Press, Cambridge
- Lukaszewicz, Grzegorz. (1999), *Micropolar Fluids Theory and Applications*, Springer science+Business Media, New York
- Munson, B.R., Okiishi, T.H., Huebsch, W.W., Rothmayer, A.P., 2012, *Fundamental of Fluid Mechanics*, seventh edition, John Willey and Son, Inc., USA
- Ningtyas, R.A., (2016), *Magnetohidrodinamik Fluida Mikroktub Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melewati Bola Teriris*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

- Pratomo, R.V.(2017), *Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokutub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Rezzola, Luciano. (2011), *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equation*, Lecture handout, Albert Einstein Institute, Germany.
- Narayana Satya,P.V., Venkateswarlu, B., Venkataramana, S. (2013), "Effects of Hall Current and Radiation Absorption in MHD Micropolar Fluid in Rotating in a Rotating System", *Ain Sham Engineering Journal*, Vol.5, hal. 843-854.
- Streeter Victor L, Wylie E. Benjamin. (1987), *Fluid Mechanics: Metric Edition*, Fong and Song Printers Pte. Ltd., Singapore
- Tafrikan, M. (2015), "Pemodelan Pengaruh Panas Terhadap Aliran Fluida Konveksi bebas yang Melalui Bola Berpori", *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS*.
- Tannehill, J.C.,Anderson, D.A., Pletcher, R.H., (1997), *Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Taylor and Francis, USA
- Versteeg, H.K., Malalasekera, M., (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Second Edition, Prentice Hall, London.
- Wei, Z., Jang, B., Zhang, Y., dan Jia, Y., (2013), "Parallelizing Alternating Direction Implicit Solver on GPUs", *Procedia Computer Science*, Vol. 18, hal. 389 398.
- White, Frank M., (2009), *Fluid Mechanics*, Seventh Edition, Mc Graw Hill, New York
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, itspress, Surabaya
- Widodo, B., Anggraini, I.,Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2016a), "Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past A Sphere", *International Journal of Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 100, No. 2, hal. 291-299.
- Widodo, B. Anggraini, I., dan Imron, C (2016b), The characterization of Boundary Layer Flow in The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid past A Solid Sphere, *International Journal of Advances in Science Engineering and Technology*, Vol. 4, hal. 71-74.

Lampiran

Lampiran Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensi

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial aruU_\infty}{\partial ax} + \frac{\partial arvU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial ay Re^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

2. Persamaan momentum

Persamaan momentum sumbu-x

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}}\end{aligned}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u U_\infty}{\frac{\partial at}{U_\infty}} + u U_\infty \frac{\partial u U_\infty}{\partial ax} + \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u U_\infty}{\frac{\partial ay}{Re^{\frac{1}{2}}}} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma (B_o)^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \\ = -\frac{\partial \rho U_\infty^2 p}{\frac{\partial ax}{Re^{\frac{1}{2}}}} - \beta \rho (T(T_w - T_\infty) + T_\infty - T_\infty) (-g \sin x) + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 u U_\infty}{\partial a^2 x^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u U_\infty Re}{\partial a^2 y^2} \right) + \sigma (B_o)^2 u U_\infty - k \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial N}{\frac{\partial ay}{Re^{\frac{1}{2}}}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \rho (T(T_w - T_\infty)) g \sin x + (\mu + k) \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma U_\infty B_o^2 u + \frac{U_\infty Re}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan:

$$\rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \rho (T(T_w - T_\infty)) g \sin x + (\mu + k) \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma U_\infty B_o^2 u + \frac{U_\infty Re}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{a}{\rho U_\infty^2}$ dan substitusi $k = K\mu$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{a}{U_\infty^2} \beta g (T(T_w - T_\infty)) \sin x + (1 + K) \mu \left(\frac{1}{a \rho U_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{a}{\rho U_\infty} \sigma B_o^2 u + \frac{K \mu Re}{\rho a U_\infty} \frac{\partial N}{\partial y}$$

Substitusi $U_\infty a = Re v$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, $M = \frac{a \sigma B_o^2}{\rho U_\infty}$, $Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) a^3}{\nu^3}$, dan $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$. Diperoleh Persamaan momentum sumbu- x non-dimensi sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T \sin x + \frac{1 + K}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M u + K \frac{\partial N}{\partial x}$$

Persamaan momentum sumbu- y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\frac{\partial v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\partial a t}{U_\infty}} + u U_\infty \frac{\frac{\partial U_\infty v}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\partial a x}{U_\infty}} + \frac{U_\infty v}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{\partial v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\partial a y}{U_\infty}} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \beta \rho (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_o^2 \bar{v} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial \rho U_\infty^2 p}{\frac{\partial a y}{Re^{\frac{1}{2}}}} - \beta \rho (T(T_w - T_\infty) + T_\infty - T_\infty) g \cos x + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 v U_\infty}{\partial a^2 Re^{\frac{1}{2}} x^2} + \frac{\partial^2 v U_\infty}{\partial a^2 y^2} \right) \\
&+ \sigma B_o^2 v U_\infty - k \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial N}{\frac{\partial a y}{Re^{\frac{1}{2}}}} \\
&= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} - \beta \rho (T(T_w - T_\infty)) g \cos x + (\mu + k) \left(\frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&+ \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} v \sigma B_o^2 - \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} - \beta \rho (T(T_w - T_\infty)) g \cos x + (\mu + k) \\
&\quad \left(\frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} v \sigma B_o^2 \\
&\quad - \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{a}{\rho U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}$ dan substitusi $k = K\mu$, $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^3}$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v^2 Gr}{a^2 U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}} T \cos x + (1 + K) \left(\frac{\mu}{U_\infty a Re \rho} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + \frac{av}{U_\infty} \sigma B_o^2 - \frac{\mu}{\rho a U_\infty} K \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

Substitusi $U_\infty a = Re.v$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, $M = \frac{a \sigma B_o^2}{\rho U_\infty}$, , dan $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$. Diperoleh Persamaan momentum sumbu- y non-dimensi sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\alpha}{Re^{\frac{1}{2}}} T \cos x + \frac{1 + K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + K}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Mv}{Re} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial y}$$

3. Persamaan Momentum Anguler

$$\rho J \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}
\rho J \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) \\
= \rho J \left(\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{u U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{v U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$= \rho j \frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right)$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}) &= \left(\mu + \frac{K\mu}{2} \right) j \left(\frac{\partial^2 Re^{\frac{1}{2}} U_\infty N}{\partial a^2 x^2 a} + \frac{\partial^2 Re^{\frac{1}{2}} U_\infty N Re}{\partial a^2 y^2 a} \right) \\ &- K\mu \left(2 \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} N + \frac{\partial Re^{\frac{1}{2}} U_\infty u}{\partial ay} + \frac{\partial U_\infty v}{\partial Re^{\frac{1}{2}} ax} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}) &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \mu j \left(\frac{Re^{\frac{1}{2}} U_\infty}{a^3} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K\mu \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan:

$$\begin{aligned} \rho j \frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \mu j \left(\frac{Re^{\frac{1}{2}} U_\infty}{a^3} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K\mu \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{a^2}{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}$, sehingga diperoleh:

$$\rho j \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\mu j}{U_\infty a} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K\mu \frac{a}{U_\infty} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Membagi kedua ruas dengan ρj kemudian substitusi $\mu = \rho \nu$ dan $j = \frac{a\nu}{U_\infty}$, sehingga diperoleh persamaan momentum angular sebagai berikut:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

4. Persamaan Energi

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{c}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(T_w - T_\infty) + T_\infty}{\frac{\partial at}{U_\infty}} + U_\infty u \frac{\partial T(T_w - T_\infty) + T_\infty}{\partial ax} + \frac{U_\infty v}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial T(T_w - T_\infty) + T_\infty}{\frac{\partial ay}{Re^{\frac{1}{2}}}} \\ = \frac{c}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty) + T_\infty}{\partial a^2 x^2} + \frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty) + T_\infty}{\frac{\partial a^2 y^2}{Re}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial T(T_w - T_\infty)}{\partial t} + \frac{\partial T_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty u}{a} \left(\frac{\partial T(T_w - T_\infty)}{\partial x} + \frac{\partial T_\infty}{\partial x} \right) + \frac{U_\infty v}{a} \left(\frac{\partial T(T_w - T_\infty) \partial y}{\partial x} + \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right) \\ &= \frac{c}{\rho C_p a^2} \left(\frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial x^2} + Re \left(\frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty) + \partial^2 T_\infty}{\partial y^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Karena T_∞ suatu konstanta, maka $\frac{\partial T_\infty}{\partial t} = 0$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} & \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial T(T_w - T_\infty)}{\partial t} + \frac{U_\infty u}{a} \frac{\partial T(T_w - T_\infty)}{\partial x} + \frac{U_\infty v}{a} \left(\frac{\partial T(T_w - T_\infty) \partial y}{\partial x} + \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right) = \frac{c}{\rho C_p a^2} \left(\frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + Re \frac{\partial^2 T(T_w - T_\infty) + \partial^2 T_\infty}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{a}{(T_w - T_\infty) U_\infty}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c}{\rho C_p U_\infty a} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c}{\rho C_p Re} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Lampiran 2.Non-Dimensional Kondisi Batas

Kondisi batas yang digunakan adalah:

$\bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0, \bar{T} = T_\infty, B_0 = 0$ untuk setiap \bar{x}, \bar{y}

$\bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \bar{T} = T_w, B_0 > 0$ pada $\bar{y} = 0$

$u = u_e(x), \bar{N} = 0, \bar{T} = T_\infty, B_0 = 0$ pada $\bar{y} \rightarrow \infty$ Dengan menggunakan variabel non-dimensi $y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}$ dan $T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$, maka diperoleh:

$$\bar{T} = T_\infty$$

$$T = \frac{T_\infty - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 0$$

$$\bar{T} = T_w$$

$$T = \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1$$

$$\bar{N} = 0$$

$$N = \frac{a \cdot 0}{Re^{\frac{1}{2}} U_\infty} = 0$$

$$\bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$N = \frac{Re^{\frac{1}{2}} a}{U_\infty} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$N = \frac{Re^{\frac{1}{2}} a}{U_\infty} - n \frac{\partial u U_\infty}{\partial ay Re^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = -n \frac{\partial u}{\partial y}$$

Sehingga kondisi batasnya menjadi

$t < 0 : u = v = N = 0, T = 0, B_0 = 0$ untuk setiap x, y

$t \geq 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, T = 1, B_0 > 0$ pada $y = 0$

$u = u_e(x), N = 0, T = 0, B_0 = 0$ pada $y \rightarrow \infty$

Lampiran 3. *Free Stream*

Koordinat bola (*spherical*) dari kecepatan aliran bebas (*free stream*) adalah:

$$U_r = -U_\infty \cos\theta \quad (1)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin\theta \quad (2)$$

$$U_\phi = 0 \quad (3)$$

menurut (Anderson, 1995), *streamline* kecepatan adalah:

$$U = \nabla\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} + 0e\phi \quad (4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (83)-(85) ke persamaan (86), diperoleh:

$$U_r = -U_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} = -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}) \cos\theta \quad (5)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} = \quad (6)$$

$$U_\phi = 0 \quad (7)$$

Untuk menentukan titik stagnasi pada aliran, diberikan $U_r = U_\phi = 0$. Dari persamaan (88), $U_\phi = 0$ diberikan $\sin\theta = 0$, dimana titik stagnasi berada pada $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$. Dari persamaan (87), dengan $U_r = 0$, dapat diperoleh

$$-U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} = 0 \quad U_\infty = \frac{\mu}{2\pi r^3} \quad (8)$$

$r = R$ adalah koordinat jari-jari dari titik stagnasi. Dari persamaan (90), diperoleh nilai R sebagai berikut:

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi U_\infty}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Substitusi nilai R ke persamaan (87), sehingga

$$U_r = -U_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \cos\theta \frac{2\pi U_\infty}{\mu} = 0 \quad (9)$$

Dengan kata lain, $U_r = 0$ ketika $r = R$ untuk semua nilai θ dan ϕ . Daerah kecepatan yang diberikan pada persamaan (85)-(87) adalah aliran *incompressible* yang melewati bola dengan jari-jari R . Permukaan bola dimana $r = R$, kecepatan tangensial didefinisikan pada persamaan (88). Dengan mensubstitusikan persamaan (91) ke persamaan (88), diperoleh:

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_\infty}{R^3}\right) \sin\theta$$

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin\theta \quad (10)$$

Lampiran 4. Perhitungan Persamaan Similaritas

Persamaan yang diperoleh dari fungsi alir, selanjutnya akan ditransformasikan ke dalam persamaan similaritas menggunakan variabel-variabel similaritas berikut:

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

$$\eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

$$T = s(x, \eta, t)$$

1. Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\ + \frac{2}{3} \alpha T u_e + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial(t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)}{\partial x} = t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) r(x) \frac{du_e(x)}{dx} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\ &+ t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{dr(x)}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(t^{\frac{1}{2}} U_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}} U_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= \frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) = r(x) \frac{dU_e(x)}{dx} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + U_e(x) \frac{dr(x)}{dx} \\ &\quad \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + U_e(x) + r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) = u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) + u_e(x) r(x) \\ &\quad \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t} = -\frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial(t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

untuk selanjutnya akan dituliskan $u_e = u_e, r(x) = r$ dan $f(x, \eta, t) = f$ sehingga persamaan similiaritas untuk momentum yaitu :
Rusa kiri

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{du_e}{dr} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) r(x) \frac{du_e(x)}{dx} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{dr(x)}{dx} \right) \left(\frac{u_e r}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ &= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + u_e \frac{du_e}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ &\quad - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}&u_e \frac{du_e}{dx} + M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \frac{2}{3} \alpha T u_e + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left(\frac{1}{r} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - u_e \right) + \frac{2}{3} \alpha s u_e + (1 + K) \frac{1}{r} \left(\frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \frac{2}{3} \alpha s u_e + (1 + K) \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + u_e \frac{du_e}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = u_e \frac{du_e}{dx} + M(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e) + \frac{2}{3} \alpha s u_e + (1 + K) \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikali dengan $\frac{t}{u_e}$, sehingga diperoleh persamaan momentum berikut:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t \frac{du_e}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e t}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} t - \frac{u_e t f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e t \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = t \frac{du_e}{dx} + M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{2}{3} \alpha s t + (1 + K) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{du_e}{dx} + M \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{2}{3} \alpha s \right) + \frac{du_e}{dx} t \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\
& = t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{2}{3} \alpha s t + \frac{du_e}{dx} t \left(1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\
& = t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t)) = \frac{\partial (t^{-\frac{1}{2}} U_e(x) h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
&= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e(x) h(x, \eta, t)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(t^{-\frac{1}{2}}u_e(x)h(x, \eta, t)) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{du_e(x)}{dx}h(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_e(x)}{t}\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta}\right) = \frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}$$

Persamaan momentum angular ruas kiri:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial y} \\ = & -\frac{\eta}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)h(x, \eta, t) \\ & + \frac{1}{r}(u_e(x)r(x)\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta})\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{du_e(x)}{dx}h(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x}\right) \\ & - \frac{1}{r}(t^{\frac{1}{2}}f(x, \eta, t)r(x)\frac{du_e(x)}{dx} + t^{\frac{1}{2}}u_e(x)r(x)\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}}u_e(x)f(x, \eta, t)\frac{dr(x)}{dx}) \\ & \quad \left(\frac{u_e(x)}{t}\frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta}\right) \\ = & -\frac{\eta}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}u_e\frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{du_e}{dx} + \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial h}{\partial x} - (t^{\frac{1}{2}}f\frac{du_e}{dx} \\ & - \frac{t^{\frac{1}{2}}u_e f}{r}\frac{dr}{dx} - t^{\frac{1}{2}}u_e\frac{\partial f}{\partial x})\left(\frac{1}{t}u_e\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) \\ = & -\frac{\eta}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}u_e\frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{du_e}{dx} + \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u_e f}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{du_e}{dx} \\ & - \frac{u_e^2 f}{t^{\frac{1}{2}}r}\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{dr}{dx} - \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{K}{2})\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) - K(2N + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}) \\ = & (1 + \frac{K}{2})\left(\frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\right) - K\left(2\left(\frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{r}\frac{u_e r}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\ = & (1 + \frac{K}{2})\left(\frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\right) - K\left(2\left(\frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\ = & (1 + \frac{K}{2})\left(\frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\right) - K\frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}}(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}) \end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan, sehingga

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u_e f}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} \\ & - \frac{u_e^2 f}{t^{\frac{1}{2}} r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dr}{dx} - \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = (1 + \frac{K}{2}) \left(\frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) - K \frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}} \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

Kedua ruas dikali dengan $\frac{t^{\frac{3}{2}}}{u_e}$, sehingga persamaan momentum angular menjadi

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{2} + th \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - t f \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e t f}{r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dr}{dx} - u_e t \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \\ & = (1 + \frac{K}{2}) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) - K t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{K}{2}) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ & = t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + K t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

3. Persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \quad (11)$$

Untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa $s(x, \eta, t) = s$ sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu :

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{ds}{dx} - \frac{1}{r} \left(t^{\frac{1}{2}} f r \frac{du_e}{dx} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e f \frac{dr}{dx} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ & = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{ds}{dx} - \left(f \frac{du_e}{dx} + u_e \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u_e f}{r} \frac{dr}{dx} \right) \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}$$

Kedua ruas dikali dengan $Pr t$, sehingga persamaan energi menjadi

$$-Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt \frac{\partial s}{\partial t} + Prtu_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{ds}{dx} - Prtf \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prtu_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt \frac{u_e f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prtf \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{ds}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right)$$

4. Penurunan Kondisi Batas

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e$$

dan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

Sehingga diperoleh

$$u = \frac{1}{r} u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} = u_e$$

$$\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} = 1$$

Kondisi batasnya menjadi $t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0$ untuk setiap x, η

$t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1$, pada $\eta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = s = 0$ pada $\eta \longrightarrow \infty$

Lampiran 5. Penurunan Kondisi awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan kondisi awal yaitu:

$$(1+K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' + Mt(f' - 1) + \frac{2}{3}\alpha st + \frac{3}{2}t(1 + ff'' - (f')^2) = t\left(\frac{\partial f'}{\partial t}\right)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t\frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + f'')$$

$$s'' + Pr\frac{\eta}{2}s' + \frac{3}{2}Prtf s' = Prt\frac{\partial s}{\partial t}$$

Untuk $t = 0$, diperoleh persamaan berikut:

$$(1+K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} = 0$$

$$s'' + Pr\frac{\eta}{2}s' = 0$$

Untuk mendapatkan persamaan f digunakan persamaan berikut

$$(1+K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$

Misalkan $f'' = z$ dan $h = -nf''$, sehingga persamaan menjadi:

$$(1+K)f''' - Knf''' + \frac{\eta}{2}z = 0$$

$$(1+K)z' - Knz' + \frac{\eta}{2}z = 0$$

$$(1+K[1-n])z' + \frac{\eta}{2}z = 0$$

dengan $z' = \frac{dz}{d\eta}$, maka diperoleh persamaan:

$$(1+K[1-n])dz + \frac{\eta}{2}z d\eta = 0$$

$$\frac{(1+K[1-n])}{z}dz + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

Kedua ruas diintegrasikan

$$(1 + K[1 - n]) \ln z + \frac{\eta^2}{4} = c1$$

$$(1 + K[1 - n]) \ln z = c1 - \frac{\eta^2}{4}$$

$$\ln z = \frac{c1}{(1 + K[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}$$

$$z = e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} - e^{\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}}$$

Karena $z = f''$, maka diperoleh persamaan berikut

$$f'' = e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} - e^{\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (12)$$

$$f' = \int e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} - e^{\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} d\eta$$

$$f' = e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} d\eta$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi *error* (*erf*) yaitu:

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f' &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} d\eta \\ &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + K[1 - n]}}\right) + c2 \end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan didapatkan: saat $\eta = 0$ dengan $f' = 0$, diperoleh:

$$e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + K[1 - n]}}\right) + c2 = 0$$

$$e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}(0) + c2 = 0$$

$$c2 = 0$$

Substitusi $c2 = 0$ ke persamaan f'

$$f' = e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + K[1 - n]}}\right) + c2$$

$$f' = e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}}\right) \quad (13)$$

Dengan menggunakan kondisi batas, yaitu $f' = 1$ saat $\eta = \infty$, akan diperoleh f' sebagai berikut

$$\begin{aligned} 1 &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}}\right) \\ 1 &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf}(\infty) \\ 1 &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} &= e^{\frac{c1}{(1+K[1-n])}} \end{aligned} \quad (14)$$

Substitusi persamaan (120) ke persamaan (119) dan (118), diperoleh persamaan berikut:

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}}\right) \quad (15)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (16)$$

Dengan mengintegrasikan f' , diperoleh f sebagai berikut

$$f = \operatorname{nerf}\frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} + 2\sqrt{\frac{1+K(1-n)}{\pi}} (e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}} - 1) \quad (17)$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan h dan h'

$$h = -nf'' = -\frac{n}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (18)$$

$$h' = -nf''' = \frac{n\eta}{2(1+K[1-n])\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (19)$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan s dan s' . Dengan memisalkan $s' = k$, diperoleh:

$$s'' + Pr\frac{\eta}{2}s' = 0$$

$$k' + Pr\frac{\eta}{2}k = 0$$

dengan $k' = \frac{dk}{d\eta}$ dan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{d\eta}{k}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{k}dk + Pr\frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

kedua ruas diintegalkan, diperoleh

$$\ln k + \frac{Pr\eta^2}{4} = c3$$

$$\ln k = c3 - \frac{Pr\eta^2}{4}$$

$$k = e^{-\frac{Pr\eta^2}{4} + c3}$$

$$k = e^{c3} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}$$

karena $k = s'$, maka dapat diperoleh persamaan s' sebagai berikut

$$s' = e^{c3} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}$$

$$s = \int e^{c3} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta$$

$$s = e^{c3} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi *error*, diperoleh

$$\begin{aligned} s &= e^{c3} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \\ &= e^{c3} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c4 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $s = 1$ saat $\eta = 0$, akan ditentukan e^{c3} dan $c4$

$$s = e^{c3} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c4 \quad (20)$$

$$1 = e^{c3} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(0) + c4$$

$$c4 = 1$$

$s = 0$ saat $\eta = \infty$,

$$s = e^{c3} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c4$$

$$0 = e^{c3} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\infty) + 1$$

$$e^{c3} \sqrt{\pi} = -1$$

$$e^{c3} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Dengan substitusi e^{c3} dan $c4$ ke persamaan (120), diperoleh

$$s = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}erf\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + 1$$

$$s = erf\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + 1$$

$$s = -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}$$

BIOGRAFI PENULIS



Penulis bernama Mufatin Fauziyah, lahir di Gresik, 30 Januari 1989, merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di MIN I Gresik, SMPN I Kedamean Gresik dan SMAN I Krian Sidoarjo. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi pada program studi pendidikan matematika jurusan matematika pada tahun 2007-2011 di Universitas Negeri Surabaya, dengan skripsi berjudul "Keaktifan dan Kemampuan Komunikasi Matematika Siswa Dalam Pembelajaran Aktif Dengan Strategi *Team Quiz* Di Kelas X-1 SMA Negeri 1 Krian Sidoarjo". Lima tahun Kemudian penulis melanjutkan studi di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada Program Studi Magister Matematika angkatan 2016.